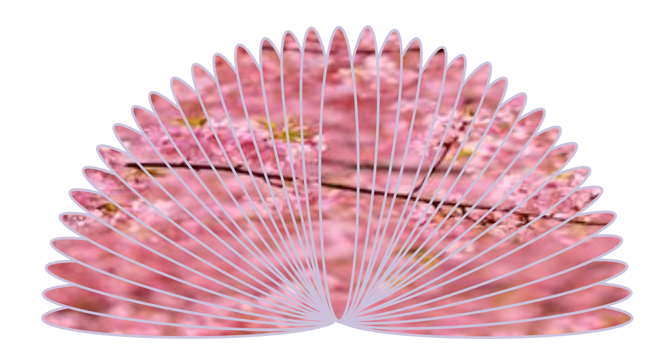
الاسم:

تمارين

في المعادلات التفاضلية 1

السنة الثانية رياضيات



اعداد الأستاذ

أحمد حاتم أبو حاتم

❶ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' - 2x\, y = \left(3x^2 - 2x^4\right)$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى وغير متجانسة بالدالة y والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$y' - 2x\, y = \left(3x^2 - 2x^4\right) \Rightarrow \mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2x\, dx} = e^{-x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[y\, e^{-x^2}\right]' = \left(3x^2 - 2x^4\right)e^{-x^2}$$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$y\, e^{-x^2} = \int\left(3x^2 - 2x^4\right)e^{-x^2}dx + c \Rightarrow \; y\, e^{-x^2} = x^3 e^{-x^2} + c \Rightarrow$$

$$\boxed{y = x^3 + c\, e^{x^2}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.



❷ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(\sin^2 y + x \cot y\right)dy = dx$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل التالي:

$$\left(\sin^2 y + x \operatorname{cot}y\right)dy = dx \Rightarrow \left(\sin^2 y + x \operatorname{cot}y\right) = \frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \left(\sin^2 y + x \operatorname{cot}y\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} - x \operatorname{cot}y = \sin^2 y \quad \Rightarrow \boxed{x' - \cot x = \sin^2 y}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ومن المرتبة الأولى بالنسبة للمشتق بالدالة x والمتحول المستقل y ولحلها نوجد عامل التكميل بالشكل التالي:

$$\mu = e^{\int p(y)dy} = e^{\int -\operatorname{ctg}y\, dy} = e^{\int -\frac{\cos y}{\sin y}dy} = e^{-\ln(\sin y)} = e^{\ln\left(\frac{1}{\sin y}\right)} = \frac{1}{\sin y}$$

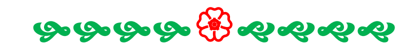
نضرب طرفي المعادلة السابقة بعامل التكميل فتصبح تامة وتكتب بالشكل :

$$\frac{x'}{\sin y} - \frac{\operatorname{cot}y}{\sin y}x = \sin y \Rightarrow \frac{x'}{\sin y} - \frac{\cos y}{\sin^2 y}x = \sin y \Rightarrow$$

$$\left[\frac{x}{\sin y}\right]' = \sin y \Rightarrow \frac{x}{\sin y} = \int \sin y\, dy + c = -\cos y + c \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sin y} = -\cos y + c \Rightarrow \boxed{x = \sin y\,(c - \cos y)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.



❸ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(y - x\sin x^2\right)dx + x dy = 0$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل التالي:

$$\left(y - x\sin x^2\right)dx + x dy = 0 \Rightarrow \left(y - x\sin x^2\right) + x\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$x\, y' + \left(y - x\sin x^2\right) = 0 \Rightarrow y' + \frac{1}{x}y - \sin x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{y' + \frac{1}{x}y = \sin x^2}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ومن درجة الأولى بالدالة y والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل لها:

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln(x)} = x$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$[x\, y]' = x\sin x^2 \Rightarrow x\, y = \int x\sin x^2 dx + c \Rightarrow x\, y = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$$

$$\boxed{y = \frac{c}{x} - \frac{1}{2x}\cos x^2}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.



❹ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y\ln y\, dx + \left(x - \ln y\right)dy = 0$$

الحل:

إن المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y\ln y\, dx + \left(x - \ln y\right)dy = 0 \Rightarrow y\ln y\frac{dx}{dy} + \left(x - \ln y\right) = 0 \Rightarrow y\ln y\frac{dx}{dy} + x = \ln y \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{\ln y}{y\ln y} \Rightarrow \boxed{x' + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى بالدالة x والمتحول المستقل y وهي غير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل بالشكل:

$$\mu = e^{\int p(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y\ln y}dy} = e^{\int \frac{\left(\frac{dy}{y}\right)}{\ln y}} = e^{\int \frac{d\ln y}{\ln y}} = e^{\ln(\ln(y))} = \ln(y) \Rightarrow \boxed{\mu = \ln(y)}$$

نضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل فتصبح تامة:

$$[x\ln y]' = \frac{1}{y}\ln y \Rightarrow x\ln y = \int \frac{1}{y}\ln y\, dy + c \Rightarrow x\ln y = \int \ln y\left(\frac{dy}{y}\right) + c \Rightarrow$$

$$x\ln y = \int \ln y\, d\ln y + c \Rightarrow x\ln y = \frac{1}{2}\ln^2 y + c \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}\ln y + \frac{c}{\ln y}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .

❺ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + y\cot x = 2e^{\cos x}$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y' + (\cot x)y = 2e^{\cos x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية بالدالة y والمتحول المستقل x وهي غير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \operatorname{cotg} x\, dx} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} = e^{\int \frac{d\sin x}{\sin x}} = e^{\ln(\sin x)} = \sin x$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل فتصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$[y\sin x]' = 2\sin x\, e^{\cos x} \Rightarrow$$

$$y\sin x = \int 2\sin x\, e^{\cos x} dx + c = -2\int e^{\cos x} d\cos x + c = -2e^{\cos x} + c \Rightarrow$$

$$y\sin x = -2e^{\cos x} + c \Rightarrow y\sin x + 2e^{\cos x} = c \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{\sin x}\left(c - 2e^{\cos x}\right)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.



❻ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة بالدالة y والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل بالشكل:

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cos x\, dx} = e^{\sin x} \Rightarrow \boxed{\mu = e^{\sin x}}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل فتصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[y e^{\sin x}\right]' = 1 \Rightarrow y e^{\sin x} = x + c \Rightarrow \boxed{y = (x + c)e^{-\sin x}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❼ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$y' + (\tan x)y = \frac{1}{\cos x}$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة بالدالة y والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int \tan x\,dx}=e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}e^{-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx}=e^{-\ln(\cos x)}=e^{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}=\frac{1}{\cos x}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[\frac{1}{\cos x}y\right]'=\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$\frac{1}{\cos x}y=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+c \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos x}y=\tan x+c \;\Rightarrow$$

$$y=\cos x\left(\tan x+c\right) \;\Rightarrow\; \boxed{y=\sin x+c\cos x}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❽ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'+2xy=2xe^{-x^2}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[y\,e^{x^2}\right]'=e^{x^2}\left(2xe^{-x^2}\right)=2x$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$y\,e^{x^2}=x^2+c \;\Rightarrow\; \boxed{y=\left(x^2+c\right)e^{-x^2}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❾ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'\cos^2 x+y=\tan x$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'+\frac{1}{\cos^2 x}y=\frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\frac{1}{\cos^2 x}dx}=e^{\tan x}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[y\,e^{\tan x}\right]' = e^{\tan x}\frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$y\,e^{\tan x} = \int e^{\tan x}\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx + c \Rightarrow y\,e^{\tan x} = \int \tan x\, e^{\tan x} d(\tan x) + c \Rightarrow$$

$$y\,e^{\tan x} = (\tan x - 1)e^{\tan x} + c \Rightarrow \boxed{y = (\tan x - 1) + c\,e^{-\tan x}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.



❶⓿ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'\cos x = \frac{y}{\ln y}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة تفاضلية منفصلة المتحولات تكتب بالشكل:

$$\frac{dy}{dx}\cos x = \frac{y}{\ln y} \Rightarrow \frac{\ln y}{y}dy = \frac{dx}{\cos x} \Rightarrow \int\frac{\ln y}{y}dy = \int\frac{dx}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\int\frac{\ln y}{y}dy = \int \ln y\left(\frac{1}{y}dy\right) = \int \ln y\, d\ln y = \frac{1}{2}\ln^2 y$$

ولنوجد قيمة التكامل:

$$\int\frac{dx}{\cos x}$$

بفرض $t = \tan\frac{x}{2}$ عندئذٍ فإنَّ: $x = 2\arctan t$ وبالتالي فإنَّ: $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ونحن نعلم أنَّ:

$$\cos x = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left[1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left[1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]} = \frac{\left[1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\left[1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int\frac{2}{1-t^2}dt = \int\frac{2}{(1-t)(1+t)}dt = \int\frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)}dt =$$

$$\int\left[\frac{(1-t)}{(1-t)(1+t)} + \frac{(1+t)}{(1-t)(1+t)}\right]dt = \int\left[\frac{1}{(1+t)} + \frac{1}{(1-t)}\right]dt = \ln(1+t) - \ln(1-t) = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{\cos x} = \ln\left[\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right]$$

مما سبق نجد أنَّ:

$$\frac{1}{2}\ln^2 y=\ln\left[\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right]+\ln c \Rightarrow \ln^2 y=2\ln\left[\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right]+2\ln c$$

❶❶ أثبت أنَّ المعادلة التفاضلية الآتية متجانسة في الأبعاد من الدرجة الثانية، ثم أوجد الحل العام لها.

$$\left(x^3+xy\right)y'=y^2-x^4$$

الحل:

نبدل في المعادلة كل x بـ λx ، وكل y بـ $\lambda^n y$ ، وكل y' بـ $\lambda^{n-1}y'$ فنجد أنَّ:

$$\left((\lambda x)^3+(\lambda x)(\lambda^n y)\right)\left(\lambda^{n-1}y'\right)=\left(\lambda^n y\right)^2-(\lambda x)^4 \Rightarrow$$

$$\left(\lambda^3 x^3+\lambda^{n+1}x\,y\right)\left(\lambda^{n-1}y'\right)=\lambda^{2n}y^2-\lambda^4x^4 \Rightarrow \left(\lambda^{n+2}x^3+\lambda^{2n}x\,y\right)y'=\lambda^{2n}y^2-\lambda^4x^4$$

ولإيجاد قيمة n فإننا نجعل قوى λ في جميع حدود المعادلة متساوية:

$$n+2=2n=2n=4 \Rightarrow n=2$$

وهذا يعني أن المعادلة المعطاة متجانسة الأبعاد من الدرجة الثانية ، ولحلها نجري التحويل: $y=u.x^2$ وبالتالي فإنَّ:

$$y'=x^2u'+2xu$$

كما أنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'=\frac{y^2-x^4}{x^3+xy}$$

وبالاستفادة من التحويل تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$x^2u'+2xu=\frac{\left(x^2u\right)^2-x^4}{x^3+x\left(x^2u\right)}=\frac{x^4\left(u^2-1\right)}{x^3(u+1)}=\frac{x(u-1)(u+1)}{(u+1)}=xu-x \Rightarrow$$

$$x^2u'+2xu-xu+x=0 \Rightarrow x\,u'=-(u+1) \Rightarrow x\frac{du}{dx}=-(u+1) \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u+1}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{u+1}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(u+1)=-\ln x+\ln c \Rightarrow \ln(u+1)=\ln\left(\frac{c}{x}\right) \Rightarrow$$

$$u+1=\frac{c}{x} \Rightarrow u=\frac{c}{x}-1$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد: $u=\frac{y}{x^2} \Leftarrow y=x^2.u$ ، وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{y}{x^2}=\frac{c}{x}-1 \Rightarrow \boxed{y=cx-x^2}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

وظيفة ❶ : اعتمادا على التجانس العام أوجد الحل العام للمعادلة : $(6-xy)dx+x^2dy=0$.

وظيفة ❷ : أوجد الحل العام للمعادلة : $y'=\cos(x-y-1)$.

❷❶ جد الحل لمسألة كوشي التالية:

$$xy'=y+x\sin\left(\frac{y}{x}\right) \quad ; \quad y(1)=\frac{\pi}{2}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل التالي:

$$y'=\frac{y}{x}+\sin\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبالتالي فالمعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة تفاضلية متجانسة ولحلها نجري التحويل:

$$\frac{y}{x}=z \Rightarrow y=xz \Rightarrow y'=xz'+z$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الأخيرة نجد أنَّ:

$$xz'+z=z+\sin(z) \Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\sin(z) \Rightarrow \frac{dz}{\sin(z)}=\frac{dx}{x}$$

وبمكاملة طرفي العلاقة الأخيرة نجد أنَّ:

$$\int\frac{dz}{\sin(z)}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left[\tan\left(\frac{z}{2}\right)\right]=\ln x+\ln c \Rightarrow \ln\left[\tan\left(\frac{z}{2}\right)\right]=\ln(cx) \Rightarrow$$

$$\tan\left(\frac{z}{2}\right)=cx \Rightarrow z=2\arctan(cx)$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $z=\frac{y}{x}$ نجد أنَّ المعادلة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$\frac{y}{x}=2\arctan(cx) \Rightarrow \boxed{y=2x\arctan(cx)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة ، أمَّا إيجاد حل مسألة كوشي يعني إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المحقق للشرط المرفق مع المعادلة التفاضلية المعطاة وبالتالي لإيجاد الحل الخاص المطلوب نطبق الشرط المعطى على الحل العام فنحصل على الحل المطلوب:

$$y(1)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}=2(1)\arctan[c(1)] \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\arctan(c) \Rightarrow \boxed{c=1}$$

وبتعويض ذلك في الحل العام نجد أنَّ حل مسألة كوشي المعطاة هو :

$$\boxed{y=2x\arctan(x)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❸❶ جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(x+y\,e^{\frac{y}{x}}\right)dx-xe^{\frac{y}{x}}dy=0$$

والمحقق للشرط $y(0)=1$.

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$xe^{\frac{y}{x}}dy=\left(x+ye^{\frac{y}{x}}\right)dx$$

وبقسمة طرفي المعادلة على x نجد أنَّ:

$$e^{\frac{y}{x}}dy=\left(1+\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)dx$$

ومنه فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(1+\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)}{e^{\frac{y}{x}}}\Rightarrow y'=\frac{\left(1+\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)}{e^{\frac{y}{x}}}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة ولحلها نجري التحويل:

$$\frac{y}{x}=z\quad\Rightarrow y=x.z\quad\Rightarrow y'=x.z'+z$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أنَّ:

$$x.z'+z=\frac{\left(1+ze^{z}\right)}{e^{z}}=\frac{1}{e^{z}}+z\quad\Rightarrow x.z'=\frac{1}{e^{z}}\quad\Rightarrow x.\frac{dz}{dx}=\frac{1}{e^{z}}\quad\Rightarrow\frac{dx}{x}=e^{z}dz\Rightarrow$$
$$\ln(x)=e^{z}+c$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$\ln(x)=e^{\frac{y}{x}}+c$$

وهو الحل العام، ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نعوض الشرط المعطى في الحل العام وهو $y(1)=0$ أي $y=0$ عندما $x=1$ ومنه نجد أنَّ:

$$\ln(1)=e^{\frac{0}{1}}+c\quad\Rightarrow 0=1+c\quad\Rightarrow c=-1$$

وبالتالي فإنَّ الحل الخاص المطلوب هو: $\boxed{\ln(x)=e^{\frac{y}{x}}-1}$

❹❶ أثبت أنَّ المعادلة التفاضلية التالية متجانسة ثمَّ أوجد الحل العام لها:

$$\left(y+\sqrt{x^{2}-y^{2}}\right)dx-x\,dy=0$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$\left(y+\sqrt{x^{2}-y^{2}}\right)dx=xdy\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{\left(y+\sqrt{x^{2}-y^{2}}\right)}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^{2}}\Rightarrow$$
$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^{2}}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة متجانسة كونها تملك الشكل $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ ولحلها نجري التحويل:

$$z=\frac{y}{x} \Rightarrow y=xz \Rightarrow y'=xz'+z$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$xz'+z=z+\sqrt{1-z^2} \Rightarrow xz'=\sqrt{1-z^2} \Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\sqrt{1-z^2} \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \arcsin(z)=\ln x+\ln c \Rightarrow \arcsin(z)=\ln(cx) \Rightarrow$$

$$z=\sin\left[\ln(cx)\right]$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $z=\frac{y}{x}$ نجد أنَّ:

$$\frac{y}{x}=\sin\left[\ln(cx)\right] \Rightarrow \boxed{y=x\sin\left[\ln(cx)\right]}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.



❺❶ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y+xy'=y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$xy'=-y+y\ln\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y'=-\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ومن الواضح أنَّ المعادلة المعطاة متجانسة ولحلها نجري التحويل $\frac{y}{x}=z$ ومنه فإنَّ $y=xz \Rightarrow y'=xz'+z$ وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$xz'+z=-z+z\ln(z) \Rightarrow xz'=-2z+z\ln(z) \Rightarrow xz'=z\left[\ln(z)-2\right] \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx}=z\left[\ln(z)-2\right] \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dz}{z\left[\ln(z)-2\right]} \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int\frac{dz}{z\left[\ln(z)-2\right]} \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{d\left[\ln(z)-2\right]}{\left[\ln(z)-2\right]} \Rightarrow \ln(x)+\ln c=\ln\left[\ln(z)-2\right] \Rightarrow$$

$$\ln(x)+\ln c=\ln\left[\ln(z)-2\right] \Rightarrow \ln(cx)=\ln\left[\ln(z)-2\right] \Rightarrow (cx)=\ln(z)-2$$

$$\ln(z)=cx+2 \Rightarrow z=e^{cx+2}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $z=\frac{y}{x}$ نجد أنَّ:

$$\frac{y}{x}=e^{cx+2} \Rightarrow \boxed{y=xe^{cx+2}}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❻❶ حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'=\frac{xy+y^2e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'=\frac{xy+y^2e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}=\frac{xy}{x^2}+\frac{y^2e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2e^{-\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

و بالتالي هي معادلة تفاضلية متجانسة ولحلها نجري التحويل التالي: $\frac{y}{x}=z$ وبالتالي يكون: $y=xz \Rightarrow y'=xz'+z$ ، وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$xz'+z=z+z^2e^{-\frac{1}{z}} \Rightarrow xz'=\frac{z^2}{e^z} \Rightarrow x\frac{dz}{dx}=z^2e^{-\frac{1}{z}} \Rightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{z^2}{e^{\frac{1}{z}}}e^{-\frac{1}{z}} \Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}dz=\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}dz=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\int d(e^{\frac{1}{z}})=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{\frac{1}{z}}+c=\ln x \Rightarrow \ln x+e^{\frac{1}{z}}=c \Rightarrow \boxed{\ln x+e^{\frac{x}{y}}=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .

❼❶ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'=\frac{x^2\left(2\frac{y}{x}\right)}{x^2\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]} \Rightarrow y'=\frac{\left(2\frac{y}{x}\right)}{\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة متجانسة ولحلها نجري التحويل التالي:

$$\frac{y}{x}=z \Rightarrow y=xz \Rightarrow y'=xz'+z$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$xz'+z=\frac{2z}{1-z^2} \Rightarrow xz'=\frac{2z}{1-z^2}-z=\frac{2z-z+z^3}{1-z^2}=\frac{z+z^3}{1-z^2} \Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{z\left(1+z^2\right)}{1-z^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}dz=\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}dz=\int\frac{dx}{x}$$

ولننجز التكامل الأخير بطريقة تفريق الكسور:

$$\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{\left(1+z^2\right)}$$

$$\left(1+z^2\right)\qquad z$$

أمثال z^2 هي:

$$A+B=-1$$

أمثال z هي:

$$C=0$$

أمثال الحد الثابت:

$$A=1$$

وبالحل المشترك نجد أنَّ:

$$A=1\ ,\ B=-2\ \ ,\ C=0$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}=\frac{1}{z}-\frac{2z}{\left(1+z^2\right)}\quad\Rightarrow\int\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}=\int\frac{1}{z}dz-\int\frac{2z}{\left(1+z^2\right)}dz\ \Rightarrow$$

$$\int\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}dz=\int\frac{dx}{x}\ \Rightarrow\int\frac{1}{z}dz-\int\frac{2z}{\left(1+z^2\right)}dz=\int\frac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \ln z-\ln\left(1+z^2\right)=\ln x+\ln c$$

$$\ln\left(\frac{z}{1+z^2}\right)=\ln(cx)\quad\Rightarrow\ \frac{z}{1+z^2}=cx$$

وبالعودة للمتحولات القديمة أي بتعويض $z=\dfrac{y}{x}$ نجد أنَّ الحل العام للمعادلة المعطاة يصبح بالشكل:

$$\left(\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)=cx\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=cx\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=c\left(x^2+y^2\right)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❽❶ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(x^2+2xy\right)dx+xy\,dy=0$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$xy\,dy=-\left(x^2+2xy\right)dx\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\left(x^2+2xy\right)}{xy}=-\left(\frac{x^2}{xy}+2\frac{xy}{xy}\right)\Rightarrow$$

$$y'=-\left(\frac{1}{(y/x)}+2\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة متجانسة ولحلها نجري التحويل التالي:

$$\frac{y}{x}=z\ \Rightarrow y=xz\ \Rightarrow y'=xz'+z$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$xz'+z=-\left(\frac{1}{z}+2\right)\ \Rightarrow\ xz'=-\left(\frac{1}{z}+2\right)-z=-\left(\frac{1}{z}+2+z\right)\Rightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx}=-\left(\frac{1+2z+z^2}{z}\right)\ \Rightarrow\ \frac{dx}{x}=-\frac{z}{(1+z)^2}dz\ \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=-\int\frac{z}{(1+z)^2}dz\ \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{(1+z)-1}{(1+z)^2}dz\ \Rightarrow\ \int\frac{dx}{x}=-\int\left[\frac{(1+z)}{(1+z)^2}-\frac{1}{(1+z)^2}\right]dz\ \Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\left[\frac{1}{(1+z)}-\frac{1}{(1+z)^2}\right]dz\ \Rightarrow\ \ln x=-\left[\ln(1+z)+\frac{1}{(z+1)}\right]+\ln c\ \Rightarrow$$

$$\ln x+\ln(1+z)-\ln c=-\frac{1}{(z+1)}\ \Rightarrow\ \ln\left[\frac{x(1+z)}{c}\right]=-\frac{1}{(z+1)}\ \Rightarrow$$

$$\frac{x(1+z)}{c}=e^{-\frac{1}{(z+1)}}\ \Rightarrow\ x(1+z)=ce^{-\frac{1}{(z+1)}}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة أي بتعويض $z=\frac{y}{x}$ نجد أنَّ الحل العام للمعادلة المعطاة يصبح بالشكل:

$$x\left(1+\frac{y}{x}\right)=ce^{-\frac{1}{\left(\frac{y}{x}+1\right)}}\ \Rightarrow\ (x+y)=ce^{-\frac{x}{(y+x)}}\quad \boxed{y=-x+ce^{-\frac{x}{(y+x)}}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋

❾❶ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'x^3\sin y=xy'-2y$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'x^3\sin y-xy'=-2y\ \Rightarrow\ y'\left(x^3\sin y-x\right)=-2y\ \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{\left(x^3\sin y-x\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\left(\frac{x^3\sin y-x}{2y}\right) \Rightarrow x'-\frac{1}{2y}x=-\frac{\sin y}{2y}x^3$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة برنولي بالدالة x والمتحول المستقل y ولحلها نقسم الطرفين على المقدار x^3 :

$$\frac{x'}{x^3}-\frac{1}{2y}\frac{1}{x^2}=-\frac{\sin y}{2y}$$

ولنجري التحويل:

$$z=\frac{1}{x^2} \Rightarrow z'=-2\frac{x'}{x^3} \Rightarrow \frac{x'}{x^3}=-\frac{1}{2}z'$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$-\frac{1}{2}z'-\frac{1}{2y}z=-\frac{\sin y}{2y} \Rightarrow z'+\frac{1}{y}z=\frac{\sin y}{y}$$

والمعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالدالة z والمتحول المستقل y :

$$\mu=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{\ln y}=y$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$[y\,z]'=y\left(\frac{\sin y}{y}\right)=\sin y$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$y\,z=\int\sin y\,dy+c \Rightarrow y\,z=-\cos y+c$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$y\frac{1}{x^2}=-\cos y+c \Rightarrow \boxed{y=x^2\left(c-\cos y\right)}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❷⓿ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'-\frac{1}{x}y=y^2e^{-x}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة برنولي ولحلها نقسم على y^2 فتصبح المعادلة المعطاة بالشكل:

$$\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{x}\frac{1}{y}=e^{-x}$$

ثم نجري التحويل:

$$z=\frac{1}{y}$$

ونشتق بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$z'=-\frac{y'}{y^2} \Rightarrow \frac{y'}{y^2}=-z'$$

نعوض في المعادلة الأخيرة لنجد أنَّ:

$$-z'-\frac{1}{x}z=e^{-x} \Rightarrow z'+\frac{1}{x}z=-e^{-x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالدالة z والمتحول المستقل x وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$[x\,z]'=x\left(-e^{-x}\right)=-x\,e^{-x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$x\,z=(x-1)e^{-x}+c \Rightarrow z=\frac{(x-1)e^{-x}+c}{x}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$\frac{1}{y}=\frac{(x-1)e^{-x}+c}{x} \Rightarrow y=\frac{x}{(x-1)e^{-x}+c} \Rightarrow \boxed{y=\frac{x\,e^{x}}{(x-1)+c\,e^{x}}}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❶❷ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'+\frac{1}{x}y=x^2y^4$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة برنولي ولحلها نقسم على y^4 فتصبح المعادلة المعطاة بالشكل:

$$\frac{y'}{y^4}+\frac{1}{x}\frac{1}{y^3}=x^2$$

ثم نجري التحويل:

$$z=\frac{1}{y^3}$$

ونشتق بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$z'=-\frac{3y'}{y^4} \Rightarrow \frac{y'}{y^4}=-\frac{1}{3}z'$$

نعوض في المعادلة الأخيرة لنجد أنَّ:

$$-\frac{1}{3}z'+\frac{1}{x}z=x^2 \Rightarrow z'-\frac{3}{x}z=-3x^2$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالدالة z والمتحول المستقل x وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\frac{-3}{x}dx}=e^{-3\int\frac{1}{x}dx}=e^{-3\ln x}=e^{\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1}{x^3}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[\frac{1}{x^3}\cdot z\right]' = \frac{1}{x^3}\left(-3x^2\right) = -\frac{3}{x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$\frac{1}{x^3}\cdot z = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + \ln c = \ln\left(\frac{c}{x^3}\right) \quad \Rightarrow \quad z = x^3 \ln\left(\frac{c}{x^3}\right)$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$\frac{1}{y^3} = x^3 \ln\left(\frac{c}{x^3}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x \ln^{\frac{1}{3}}\left(\frac{c}{x^3}\right)}}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❷❷ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة برنولي ولحلها نقسم على $\sqrt{y}$ فتصبح المعادلة المعطاة بالشكل:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$$

ثم نجري التحويل:

$$z = \sqrt{y}$$

ونشتق بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$$

نعوض في المعادلة الأخيرة لنجد أنَّ:

$$2z' - \frac{4}{x}z = x \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{2}{x}z = \frac{1}{2}x$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالدالة z والمتحول المستقل x وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{-\ln x^2} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[\frac{1}{x^2}.z\right]' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$\frac{1}{x^2}.z=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx+c \Rightarrow \frac{1}{x^2}.z=\frac{1}{2}\ln x+c \Rightarrow \frac{1}{x^2}.z=\ln\sqrt{x}+c \Rightarrow z=x^2\left(\ln\sqrt{x}+c\right)$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$\sqrt{y}=x^2\left(\ln\sqrt{x}+c\right) \Rightarrow \boxed{y=x^4\left(\ln\sqrt{x}+c\right)^2}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❸❷ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'+2x\,y=x\,e^{2x^2}y^3$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة برنولي ولحلها نقسم على y^3 فتصبح المعادلة المعطاة بالشكل:

$$\frac{y'}{y^3}+2x\frac{1}{y^2}=x\,e^{2x^2}$$

ثم نجري التحويل:

$$z=\frac{1}{y^2}$$

ونشتق بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$z'=-\frac{2y'}{y^3} \Rightarrow \frac{y'}{y^3}=-\frac{1}{2}z'$$

نعوض في المعادلة الأخيرة لنجد أنَّ:

$$-\frac{1}{2}z'+2x\,z=x\,e^{2x^2} \Rightarrow z'-4x\,z=-2x\,e^{2x^2}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالدالة z والمتحول المستقل x وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int -4x\,dx}=e^{-2x^2}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[e^{-2x^2}.z\right]'=e^{-2x^2}\left(-2x\,e^{2x^2}\right)=-2x$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$e^{-2x^2}.z=-x^2+c \Rightarrow z=\left(c-x^2\right)e^{2x^2}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$\frac{1}{y^2}=\left(c-x^2\right)e^{2x^2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{\sqrt{\left(c-x^2\right)e^{x^2}}}}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.



❹❷ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$2+\left(x^3\cos y-\frac{x}{y}\right)y'=0$$

الحل:

انَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$\left(x^3\cos y-\frac{x}{y}\right)y'=-2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(x^3\cos y-\frac{x}{y}\right)=-2 \Rightarrow \left(x^3\cos y-\frac{x}{y}\right)=-2\frac{dx}{dy}$$

$$-2x'+\frac{1}{y}x=x^3\cos y \Rightarrow \boxed{x'-\frac{1}{2y}x=\left(-\frac{1}{2}\cos y\right)x^3}$$

وهي معادلة برنولي بالدالة x والمتحول المستقل y ولحلها أولاً نقسم على x^3 فنجد:

$$\frac{x'}{x^3}-\frac{1}{2y}\cdot\frac{1}{x^2}=\left(-\frac{1}{2}\cos y\right)$$

ثم نجري التحويل التالي $z=\frac{1}{x^2}$ و بالتالي نجد $z'=-\frac{2x'}{x^3}$ نعوض في المعادلة السابقة فنجد:

$$-\frac{1}{2}z'-\frac{1}{2y}z=\left(-\frac{1}{2}\cos y\right) \Rightarrow z'+\frac{1}{y}z=\cos y$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى وغير متجانسة بالدالة z والمتحول المستقل y ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int p(y)dy}=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{\ln y}=y$$

نضرب طرفي المعادلة السابقة بعامل التكميل فتصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$[zy]'=y\cos y$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$zy=\int y\cos y\,dy+c=y\sin y+\cos y+c \Rightarrow$$

$$z=\frac{1}{y}(y\sin y+\cos y+c) \Rightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{1}{y}(y\sin y+\cos y+c) \Rightarrow$$

$$\boxed{y=x^2(y\sin y+\cos y+c)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.



❺❷ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'+2y=e^x y^2$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة برنولي كونها تملك الشكل $y'+p(x)y=q(x)y^n$ ولحلها نقسم الطرفين على y^2 فنجد:

$$\frac{y'}{y^2}+2\frac{1}{y}=e^x$$

ثمَّ نجري التحويل $\cdots(1)$ $z=\dfrac{1}{y}$ وبالتالي يكون: $\dfrac{y'}{y^2}=-z'$ $\Rightarrow$ $z'=-\dfrac{y'}{y^2}$ ثمَّ نعوض في المعادلة الأخيرة فنجد أنَّ:

$$-z'+2z=e^x \Rightarrow \boxed{z'-2z=-e^x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية بالدالة z والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل بالشكل:

$$\mu=e^{\int(-2)dx}=e^{-2x} \Rightarrow \boxed{\mu=e^{-2x}}$$

نضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل فتصبح تامة:

$$\left[z\,e^{-2x}\right]'=-e^{-x} \Rightarrow z\,e^{-2x}=\int -e^{-x}dx+c=e^{-x}+c \Rightarrow \boxed{z=e^x+ce^{2x}}\cdots(2)$$

بتعويض العلاقة (2) بالعلاقة (1) نجد أنَّ:

$$\frac{1}{y}=z=e^{-x}+ce^{2x} \Rightarrow \frac{1}{y}=e^{-x}+ce^{2x} \Rightarrow y=\frac{1}{e^{-x}+ce^{2x}}=\frac{e^x}{1+ce^{3x}}$$

ومنه نجد أنَّ الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو: $\boxed{y=\dfrac{e^x}{1+ce^{3x}}}$.

❻❷ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'=y^2-\frac{2}{x^2}$$

علماً أنها تقبل حل خاص هو : $y_1=\dfrac{1}{x}$.

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة هي معادلة ريكاتي، ولحلها نجري التحويل: $y=y_1+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}$ وبالتالي فإنَّ:

$$y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{z'}{z^2}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{z'}{z^2}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2-\frac{2}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{x^2}-\frac{z'}{z^2}=\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{2}{x^2}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$-\frac{1}{x^2}-\frac{z'}{z^2}=\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{z'}{z^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}-2\frac{1}{x}\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2} \Rightarrow$$

$$\frac{z'}{z^2}+2\frac{1}{x}\frac{1}{z}=-\frac{1}{z^2} \Rightarrow \boxed{z'+2\frac{1}{x}z=-1}$$

وهي معادلة تفاضلية بالدالة z والمتحول المستقل x ، ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\int\frac{1}{x}dx}=e^{2\ln(x)}=e^{\ln(x^2)}=x^2$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[x^2 z\right]' = -x^2$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$x^2 z = -\int x^2 dx + c \;\Rightarrow\; x^2 z = -\frac{1}{3}x^3 + c \;\Rightarrow\; z = -\frac{1}{3}x + \frac{c}{x^2}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{x}{3} + \frac{c}{x^2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{3c - x^3}{3x^2}} = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{3c - x^3} \;\Rightarrow\; \boxed{y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{3c - x^3}}$$

وظيفة: أوجد الحل العام للمعادلة : $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$ علماً أنها تقبل الحل الخاص التالي : $y = -\frac{1}{x}$

❷❼ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$xy' - y + y^2 - x^2 = 0 \quad ; \; y_1 = ax \;\; ; \; a > 0$$

الحل:

بما أنَّ $y_1 = ax \;\; ; \; a > 0$ حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة فهو يحققها:

$$x(a) - ax + (ax)^2 - x^2 = 0 \;\Rightarrow ax - ax + a^2x^2 - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; \left(a^2 - 1\right)x^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x \neq 0)$$

$$a^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (a-1)(a+1) = 0$$

وبالتالي إما $a - 1 = 0$ ومنه فإنَّ $a = 1$ مقبول والحل الخاص يصبح بالشكل: $y = x$.

أو $a + 1 = 0$ ومنه فإنَّ $a = -1$ وهذا الحل مرفوض لأنَّ شرط الحل الخاص هو $a > 0$.

إنَّ المعادلة المعطاة هي معادلة ريكاتي ولحلها نجري التحويل:

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = x + \frac{1}{z}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$x\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) - \left(x + \frac{1}{z}\right) + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - x^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{x}\left(x^2 + 2\frac{x}{z} + \frac{1}{z^2}\right) - x = 0 \;\Rightarrow$$

$$1 - \frac{z'}{z^2} - 1 - \frac{1}{xz} + x + \frac{2}{z} + \frac{1}{xz^2} - x = 0 \;\Rightarrow$$

$$-\frac{z'}{z^2}-\frac{1}{xz}+\frac{2}{z}+\frac{1}{xz^2}=0 \quad\Rightarrow\quad z'+\left(\frac{1}{x}-2\right)z=\frac{1}{x}$$

والمعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية وغير متجانسة بالدالة z والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\left(\frac{1}{x}-2\right)dx}=e^{\ln(x)-2x}=e^{\ln(x)}e^{-2x}=xe^{-2x}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[xe^{-2x}z\right]'=xe^{-2x}\left(\frac{1}{x}\right)=e^{-2x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$xe^{-2x}z=-\frac{1}{2}e^{-2x}+c \;\Rightarrow\; xz=-\frac{1}{2}+ce^{2x} \;\Rightarrow\; z=\frac{-1+2ce^{2x}}{2x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{z}=\frac{2x}{2ce^{2x}-1}$$

وبالعودة للتحويل الذي أجريناه في بداية الحل نجد أنَّ :

$$\boxed{y=x+\frac{2x}{2ce^{2x}-1}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.



❽❷ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'-xy^2+(2x-1)y=x-1 \quad ; \quad y_1=1$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة هي معادلة ريكاتي ، ولحلها نجري التحويل: $y=y_1+\frac{1}{z}=1+\frac{1}{z}$ وبالتالي فإنَّ:

$$y'=-\frac{z'}{z^2}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$\left(-\frac{z'}{z^2}\right)-x\left(1+\frac{1}{z}\right)^2+(2x-1)\left(1+\frac{1}{z}\right)=x-1$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\left(-\frac{z'}{z^2}\right)-x\left(1+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)+(2x-1)\left(1+\frac{1}{z}\right)=x-1 \;\Rightarrow$$

$$-\frac{z'}{z^2}-x-\frac{2x}{z}-\frac{x}{z^2}+2x-1+\frac{2x}{z}-\frac{1}{z}=x-1 \;\Rightarrow$$

$$-\frac{z'}{z^2}-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}=0 \;\Rightarrow\; z'+x+z=0 \;\Rightarrow\; z'+z=-x$$

وهي معادلة تفاضلية بالدالة z والمتحول المستقل x ، ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int(1)dx}=e^{x}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[e^{x}z\right]'=-x\,e^{x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$e^{x}z=-\int x\,e^{x}dx+c\ \Rightarrow\ e^{x}z=-(x-1)e^{x}+c\ \Rightarrow\ z=1-x+ce^{-x}\ \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{z}=\frac{1}{1-x+ce^{-x}}}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نحصل على الحل العام:

$$y=1+\frac{1}{1-x+ce^{-x}}\ \Rightarrow\ \boxed{y=\frac{2-x+ce^{-x}}{1-x+ce^{-x}}}$$

❾❷ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'-2x\,y+y^{2}=5-x^{2}\quad ;\quad y_{1}=x+2$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'+y^{2}-2x\,y+x^{2}-5=0\quad ;\quad y_{1}=x+2$$

نلاحظ أنَّ هذه المعادلة تملك الشكل: $y'+p(x)y^{2}+q(x)y+R(x)=0$ وهي معادلة ريكاتي، ولحلها يجب أن نعتمد على الحل الخاص ولذلك نجري التحويل التالي:

$$y=y_{1}+\frac{1}{z}\ \Rightarrow\ \boxed{y=x+2+\frac{1}{z}}\ \cdots\cdots\cdots(*)\ \Rightarrow\ y'=1-\frac{z'}{z^{2}}$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$\left(1-\frac{z'}{z^{2}}\right)+\left(x+2+\frac{1}{z}\right)^{2}-2x\left(x+2+\frac{1}{z}\right)+x^{2}-5=0\ \Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{z'}{z^{2}}\right)+(x+2)^{2}+2(x+2)\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{2}}-2x(x+2)-2\frac{x}{z}+x^{2}-5=0\ \Rightarrow$$

$$1-\frac{z'}{z^{2}}+x^{2}+4x+4+2\frac{x}{z}+\frac{4}{z}+\frac{1}{z^{2}}-2x^{2}-4x-2\frac{x}{z}+x^{2}-5=0\ \Rightarrow$$

$$-\frac{z'}{z^{2}}+\frac{4}{z}+\frac{1}{z^{2}}=0\ \Rightarrow\ z'-4z=1$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة بالدالة z والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int(-4)dx}=e^{-4x}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[e^{-4x}z\right]'=e^{-4x}$$

وبمكاملة طرفي العلاقة الأخيرة نجد:

$$e^{-4x}z=-\frac{1}{4}e^{-4x}+c\ \Rightarrow\ z=-\frac{1}{4}+ce^{4x}\ \Rightarrow z=\frac{4ce^{4x}-1}{4}\ \Rightarrow\ \frac{1}{z}=\frac{4}{4ce^{4x}-1}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ الحل المطلوب هو:

$$y = x+2+\frac{1}{z} = x+2+\frac{4}{4ce^{4x}-1} = \frac{(x+2)\left(4ce^{4x}-1\right)+4}{4ce^{4x}-1} = \frac{4c(x+2)e^{4x}-1-x-2+4}{4ce^{4x}-1}$$

$$\boxed{y = \frac{4c(x+2)e^{4x}-1-x+2}{4ce^{4x}-1}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❸⓿ حل المعادلة التالية:

$$y'+y^2-3y\tan x+\tan^2 x-1=0$$

بعد أن تبرهن أنها تقبل الحل الخاص $y_1=\tan x$.

الحل:

حتى يكون $y_1=\tan x$ حلاً خاصاً للمعادلة المعطاة يجب أن يحققها وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$(\tan x)'+(\tan x)^2-3(\tan x)\tan x+\tan^2 x-1=0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}+\tan^2 x-3\tan^2 x+\tan^2 x-1=0 \Rightarrow 1+\tan^2 x-\tan^2 x-1=0 \Rightarrow 0=0$$

وبالتالي فإنَّ $y_1=\tan x$ هو حل خاص للمعادلة المعطاة.

نلاحظ أن المعادلة المعطاة تملك الشكل: $y'+p(x)y^2+q(x)y+R(x)=0$ وهي معادلة ريكاتي ولحلها يجب أن نعتمد على الحل الخاص ولنجري التحويل:

$$y=y_1+\frac{1}{z} \Rightarrow \boxed{y=\tan x+\frac{1}{z}} \cdots\cdots(*) \Rightarrow y'=\left(1+\tan^2 x\right)-\frac{z'}{z^2}$$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أنَّ:

$$\left(1+\tan^2 x\right)-\frac{z'}{z^2}+\left(\tan x+\frac{1}{z}\right)^2-3\left(\tan x+\frac{1}{z}\right)\tan x+\tan^2 x-1=0 \Rightarrow$$

$$1+\tan^2 x-\frac{z'}{z^2}+\tan^2 x+2\tan x\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-3\tan^2 x-3\tan x\frac{1}{z}+\tan^2 x-1=0 \Rightarrow$$

$$-\frac{z'}{z^2}-\tan x\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \Rightarrow z'+(\tan x)z-1=0 \Rightarrow z'+(\tan x)z=1$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى خطية وغير متجانسة بالدالة z والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\tan x\,dx}=e^{-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx}=e^{-\ln(\cos x)}=e^{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}=\frac{1}{\cos x}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[\frac{1}{\cos x}z\right]'=\frac{1}{\cos x}(1)=\frac{1}{\cos x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$\frac{1}{\cos x}z=\int\frac{dx}{\cos x}\Rightarrow\frac{1}{\cos x}z=\ln\left[\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right]+c\Rightarrow$$

$$z=\cos x\left[\ln\left[\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right]+c\right]\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos x\left[\ln\left[\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right]+c\right]}$$

وبالتعويض في التحويل $(*)$ نجد أنَّ الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة:

$$\boxed{y=\tan x+\frac{1}{\cos x\left[\ln\left[\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right]+c\right]}}$$

❶❸ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(x^2+1\right)y'+2y^2-3xy-1=0$$

إذا علمت أنَّها تقبل الحل الخاص $y_1=ax$ حيث أنَّ a مقدار ثابت.

الحل:

بما أنَّ $y_1=ax$ هو حل خاص للمعادلة المعطاة فهو يحققها وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$\left(x^2+1\right)(a)+2a^2x^2-3ax^2-1=0\Rightarrow ax^2+a+2a^2x^2-3ax^2-1=0\Rightarrow$$

$$2a^2x^2-2ax^2+a-1=0\Rightarrow2a(a-1)x^2+a-1=0\Rightarrow(a-1)\left(2ax^2+1\right)=0$$

وبالتالي إما:

$$a-1=0\Rightarrow a=1\Rightarrow y_1=x$$

أو

$$2ax^2+1=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2x^2}$$

وهذا الخيار مرفوض لأنَّ a مقدار ثابت من نص السؤال.

وبما أنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y'+\frac{2}{\left(x^2+1\right)}y^2-\frac{3x}{\left(x^2+1\right)}y-\frac{1}{\left(x^2+1\right)}=0$$

نلاحظ أن المعادلة الأخيرة تملك الشكل: $y'+p(x)y^2+q(x)y+R(x)=0$ وهي معادلة ريكاتي ولحلها يجب أن نعتمد على الحل الخاص ولنجري التحويل:

$$y=y_1+\frac{1}{z}\quad\Rightarrow\quad \boxed{y=x+\frac{1}{z}}\ \cdots\cdots\cdots(*)\quad\Rightarrow\quad y'=1-\frac{z'}{z^2}$$

وللسهولة نعوض في المعادلة المعطاة لا المعادلة الأخيرة فنجد أنَّ:

$$\left(x^2+1\right)\left(1-\frac{z'}{z^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{z}\right)^2-3x\left(x+\frac{1}{z}\right)-1=0\quad\Rightarrow$$

$$x^2+1-\left(x^2+1\right)\frac{z'}{z^2}+2x^2+4x\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}-3x^2-3x\frac{1}{z}-1=0\quad\Rightarrow$$

$$-\left(x^2+1\right)\frac{z'}{z^2}+x\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}=0\quad\Rightarrow\quad z'-\frac{x}{\left(x^2+1\right)}z=\frac{2}{\left(x^2+1\right)}$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى خطية وغير متجانسة بالدالة z والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int-\frac{x}{x^2+1}dx}=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx}=e^{-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)}=e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}z\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left[\frac{2}{\left(x^2+1\right)}\right]=\frac{2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}z=\int\frac{2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}dx$$

ولننجز التكامل الأخير بالشكل التالي:

$$J=\int\frac{2dx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

لنجري التحويل: $x=\operatorname{sh}t\ \Rightarrow\ dx=\operatorname{ch}t\,dt$ وبالتعويض في التكامل الأخير نجد أنَّ:

$$\int\frac{2dx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{2\operatorname{ch}t\,dt}{\left(\operatorname{sh}^2t+1\right)^{\frac{3}{2}}}=2\int\frac{\operatorname{ch}t\,dt}{\left(\operatorname{ch}^2t\right)^{\frac{3}{2}}}=2\int\frac{\operatorname{ch}t\,dt}{\operatorname{ch}^3t}=2\int\frac{dt}{\operatorname{ch}^2t}=2\operatorname{th}t+c$$

$$=2\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t}+c=\frac{2\operatorname{sh}t}{\sqrt{\operatorname{sh}^2t+1}}+c=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+c$$

مما سبق نجد أنَّ:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}z=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+c\quad\Rightarrow\quad z=2x+c\sqrt{x^2+1}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{z}=\frac{1}{2x+c\sqrt{x^2+1}}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو:

$$\boxed{y=x+\frac{1}{2x+c\sqrt{x^2+1}}}$$

❈ ❈ ❈ ❈ ❈ ❈ ❈ ❈ ❈ ❈

❷❸ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+\left(e^{y}+x+x\cos y\right)dy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=\left(e^{x}+y+\sin y\right)\quad,\quad Q(x,y)=\left(e^{y}+x+x\cos y\right)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1+\cos y\quad,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1+\cos y$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة تامة ، وبأخذ $x_0=0\,,\ y_0=0$ نجد أنَّ الحل العام للمعادلة المعطاة يكتب بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)\,dx+\int_0^y Q(0,y)\,dy=\int_0^x\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+\int_0^y\left(e^{y}+0+(0)\cos y\right)dy$$

$$=\int_0^x\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+\int_0^y e^{y}\,dy=\left[e^{x}+xy+x\sin y\right]_{x=0}^{x=x}+\left[e^{y}\right]_{y=0}^{y=y}$$

$$=\left(e^{x}+xy+x\sin y-1\right)+\left(e^{y}-1\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{F(x,y)=e^{x}+e^{y}+xy+x\sin y-2=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❸❸ برهن أنَّ: $\mu=\dfrac{1}{x^{2}+y^{2}}$ عامل تكميل للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(x+y)dx+(y-x)dy=0$$

ثمَّ جد جميع عوامل التكميل لها.

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=(x+y)\quad,\ Q(x,y)=(y-x)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1\quad,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-1$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة.

حتى يكون المقدار $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ عامل تكميل للمعادلة التفاضلية المعطاة يجب أن تكون المعادلة الناتجة عن ضرب المعادلة المعطاة بعامل التكميل تامة، ولنتحقق من ذلك:

$$\frac{(x+y)}{x^2+y^2}dx+\frac{(y-x)}{x^2+y^2}dy=0$$

لدينا من المعادلة التفاضلية الأخيرة أنَّ:

$$P(x,y)=\frac{(x+y)}{x^2+y^2}\quad ,\ Q(x,y)=\frac{(y-x)}{x^2+y^2}$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{(1)(x^2+y^2)-(x+y)(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-2xy-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{(-1)(x^2+y^2)-(y-x)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2-y^2-2xy+2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة الأخيرة تامة، والمقدار $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ هو عامل تكميل لها.

وبأخذ $x_0=0\ ,\ y_0=1$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_1^y Q(0,y)dy=\int_0^x\frac{x+y}{x^2+y^2}dx+\int_1^y\frac{y-(0)}{(0)^2+y^2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{2x}{x^2+y^2}dx+y\int_0^x\frac{1}{x^2+y^2}dx+\frac{1}{2}\int_1^y\frac{1}{y}dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right]_{x=0}^{x=x}+\left[y\,\frac{1}{y}\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right]_{x=0}^{x=x}+\left[\ln(y)\right]_{y=1}^{y=y}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(y^2\right)\right]+\left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right)-\arctan(0)\right]+\left[\ln(y)-\ln(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-\ln(y)+\arctan\left(\frac{x}{y}\right)-0+\ln(y)-0$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\ \Rightarrow\ \boxed{F(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\arctan\left(\frac{x}{y}\right)=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة، ومنه فإنَّ جميع عوامل التكميل للمعادلة التفاضلية المعطاة تملك الشكل:

$$\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\phi\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

❹❸ أوجد عامل التكميل للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(2xy+x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$$

ثمَّ أوجد الحل العام لها.

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=\left(2xy+x^2y+\frac{1}{3}y^3\right) \quad , Q(x,y)=\left(x^2+y^2\right)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2x+x^2+y^2 \quad , \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}dx \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=dx \Rightarrow \ln(\mu)=x \Rightarrow \boxed{\mu=e^x}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)dx+e^x\left(x^2+y^2\right)dy=0$$

وبأخذ $x_0=0 \ , y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy$$

$$=\int_0^x e^x\left[2x(0)+x^2(0)+\frac{1}{3}(0)^3\right]dx+\int_0^y e^x\left(x^2+y^2\right)dy$$

$$=0+e^x\int_0^y\left(x^2+y^2\right)dy=e^x\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=y} \Rightarrow \boxed{F(x,y)=e^x\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❸❺ بيِّن فيما إذا كانت المعادلة التفاضلية التالية تامة أم لا ، ثمَّ أوجد الحل العام لها:

$$\left(x^2+x-y\right)dx+x\,dy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=\left(x^2+x-y\right)\quad ,\ Q(x,y)=x$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-1\quad ,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx\ \Rightarrow\ \frac{d\mu}{\mu}=\frac{-1-1}{x}dx\ \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{x}dx\ \Rightarrow \ln(\mu)=-2\ln(x)\ \Rightarrow\ \ln(\mu)=\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\Rightarrow\ \boxed{\mu=\frac{1}{x^2}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$\frac{1}{x^2}\left(x^2+x-y\right)dx+\frac{x}{x^2}dy=0\ \Rightarrow\ \left(1+\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\frac{1}{x}dy=0$$

وبأخذ $x_0=1\ ,\ y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_1^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(1,y)dy$$

$$=\int_1^x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\int_0^y\frac{1}{1}dy\ =\left[x+\ln x+\frac{y}{x}\right]_{x=1}^{x=x}+\left[y\right]_{y=0}^{y=y}$$

$$=x+\ln x+\frac{y}{x}-1-y+y\ \Rightarrow\ \boxed{F(x,y)=x+\ln x+\frac{y}{x}-1=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❸❻ لتكن لدينا المعادلات التفاضلية التالية:

$$1)\ (x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0$$

$$2)\ \left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$$

والمطلوب:

❶ أوجد عامل التكميل للمعادلة التفاضلية الأولى.

❷ أثبت أنَّ المعادلة التفاضلية الثانية تامة ، ثمَّ أوجد الحل العام لها.

الحل:

❶ إيجاد عامل التكميل للمعادلة التفاضلية الأولى:

$$(x\sin y + y\cos y)dx + (x\cos y - y\sin y)dy = 0$$

الحل:

لدينا من المعادلة المعطاة أنَّ:

$$P(x,y) = (x\sin y + y\cos y) \quad , \quad Q(x,y) = (x\cos y - y\sin y)$$

وبما أنَّ:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y$$

من الواضح أنَّ $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$، وبالتالي فالمعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$P'_y - Q'_x = x\cos y + \cos y - y\sin y - \cos y = x\cos y - y\sin y = Q(x,y)$$

وبالتالي نختار عامل التكميل بالشكل:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx \quad \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{x\cos y - y\sin y}{x\cos y - y\sin y}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = dx \ \Rightarrow \ln(\mu) = x \ \Rightarrow \boxed{\mu = e^x}$$

❷ إثبات أنَّ المعادلة التفاضلية التالية تامة ، ثمَّ إيجاد الحل العام لها:

$$\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y) = \left(3x^2 + 6xy^2\right) \quad , Q(x,y) = \left(6x^2y + 4y^3\right)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 12xy \quad , \ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 12xy$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

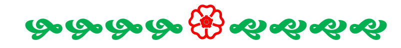
وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة تامة وبأخذ $x_0 = 0 \ , y_0 = 0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy = \int_0^x \left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \int_0^y \left(6(0)^2 y + 4y^3\right)dy$$

$$= \int_0^x \left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \int_0^y 4y^3 dy = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 \Rightarrow$$

$$\boxed{F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.



❼❸ أوجد عامل تكميل للمعادلة التفاضلية التالية ثم أوجد الحل العام لها:

$$\left(x^2+y^2+x\right)dx+ydy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=\left(x^2+y^2+x\right) \quad ,Q(x,y)=y$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2y \quad , \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=0$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{2y-0}{y}dx \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=2dx \Rightarrow \ln(\mu)=2x \Rightarrow \boxed{\mu=e^{2x}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$e^{2x}\left(x^2+y^2+x\right)dx+e^{2x}ydy=0$$

وبأخذ $x_0=0\ ,\ y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy$$

$$=\int_0^x e^{2x}\left(x^2+y^2+x\right)dx+\int_0^y e^{2(0)}y\,dy=\int_0^x e^{2x}\left(x^2+x\right)dx+y^2\int_0^x e^{2x}dx+\int_0^y y\,dy$$

$$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{2}y^2\left(e^{2x}-1\right)+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+y^2\right)$$

$$\boxed{F(x,y)=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+y^2\right)=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

ولنوضح كيف تمَّ إيجاد قيمة التكامل:

$$\int_0^x\left(x^2+x\right)e^{2x}dx$$

ننجز هذا التكامل بالتجزئة:

$$u=\left(x^2+x\right)\Rightarrow du=(2x+1)dx \quad , \quad dv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\int_0^x (x^2+x)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x^2+x)e^{2x}\Big|_{x=0}^{x=x}-\frac{1}{2}\int_0^x(2x+1)e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}-0-\frac{1}{2}\int_0^x(2x+1)e^{2x}dx$$

ولننجز التكامل الأخير بالتجزئة أيضاً:

$$\int_0^x(2x+1)e^{2x}dx$$

لننجز هذا التكامل بالتجزئة:

$$u=(2x+1)\Rightarrow du=2dx \quad , \quad dv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\int_0^x(2x+1)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}\Big|_{x=0}^{x=x}-\int_0^x e^{2x}dx=\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}\Big|_{x=0}^{x=x}-\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{x=0}^{x=x}$$

$$=\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}=x\,e^{2x}+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}=x\,e^{2x}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\int_0^x(x^2+x)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x^2+x)e^{2x}-0-\frac{1}{2}\left[x\,e^{2x}\right]=\frac{1}{2}(x^2+x-x)e^{2x}=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$$



❽❸ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0 \; .$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=x(y^2-1) \quad , Q(x,y)=y(x^2-1)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2xy \quad , \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2xy$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة تامة وبأخذ $x_0=0 \, , y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=\int_0^x x(y^2-1)\,dx+\int_0^y y\left((0)^2-1\right)dy$$

$$=\int_0^x x(y^2-1)\,dx-\int_0^y y\,dy=\frac{1}{2}x^2(y^2-1)-\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Rightarrow$$

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\left[x^2y^2-x^2-y^2\right]=c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❾❸ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y(1-xy)dx+x(1+xy)dy=0 \ .$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=y(1-xy) \quad , Q(x,y)=x(1+xy)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1-2xy \quad , \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1+2xy$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q\frac{\partial z}{\partial x}-P\frac{\partial z}{\partial y}}dz$$

ومن أجل $z=xy$ نجد أنَّ: $\frac{\partial z}{\partial y}=x \quad , \frac{\partial z}{\partial x}=y$ وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{(1-2xy)-(1+2xy)}{xy(1+xy)-xy(1-xy)}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{-4xy}{xy[1+xy-1+xy]}dz \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{-4}{2xy}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{xy}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{z}dz \Rightarrow \ln\mu=-2\ln z \Rightarrow \ln\mu=-\ln z^2 \Rightarrow$$

$$\ln\mu=\ln\frac{1}{z^2} \Rightarrow \mu=\frac{1}{z^2} \Rightarrow \boxed{\mu=\frac{1}{x^2y^2}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$\frac{1}{x^2y^2}[y(1-xy)]dx+\frac{1}{x^2y^2}[x(1+xy)]dy=0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x}\right]dx+\left[\frac{1}{xy^2}+\frac{1}{y}\right]dy=0$$

وبأخذ $x_0=1 , y_0=1$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_1^x P(x,y)dx+\int_1^y Q(1,y)dy=\int_1^x\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x}\right)dx+\int_1^y\left(\frac{1}{(1)y^2}+\frac{1}{y}\right)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{xy}-\ln(x)\right]_{x=1}^{x=x}+\left[-\frac{1}{y}+\ln(y)\right]_{y=1}^{y=y}$$

$$=\left[\left(-\frac{1}{xy}-\ln(x)\right)-\left(-\frac{1}{y}-0\right)\right]+\left[\left(-\frac{1}{y}+\ln(y)\right)-\left(-\frac{1}{1}+0\right)\right]$$

$$=\left[\left(-\frac{1}{xy}-\ln(x)+\frac{1}{y}-\frac{1}{y}+\ln(y)+1\right)\right]=\left[\left(-\frac{1}{xy}+\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)\right]=$$

$$\boxed{F(x,y)=-\frac{1}{xy}+\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1=c}$$

كما يمكن الحل بطريقة أخرى عن طريق إجراء تغيير بالمتحول:

$$z=x.y$$

يترك الحل وفق الطريقة الثانية للطالب.

40 أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(3ye^{3x}-2x\right)dx+e^{3x}dy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=\left(3ye^{3x}-2x\right)\quad ,\ Q(x,y)=e^{3x}$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=3e^{3x}\quad ,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=3e^{3x}$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة تامة وبأخذ $x_0=0\ ,\ y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=\int_0^x\left(3ye^{3x}-2x\right)dx+\int_0^y e^{3(0)}dy$$

$$=\int_0^x\left(3ye^{3x}-2x\right)dx+\int_0^y dy=\left[ye^{3x}-x^2\right]_{x=0}^{x=x}+\left[y\right]_{y=0}^{y=y}$$

$$=ye^{3x}-x^2-y+y=ye^{3x}-x^2\ \Rightarrow\ \boxed{F(x,y)=ye^{3x}-x^2=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.



❶ ❹ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(2y^2+\frac{1}{x}\right)dx+2xydy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=\left(2y^2+\frac{1}{x}\right)\quad ,\ Q(x,y)=2xy$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=4y\quad ,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2y$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx\ \Rightarrow\ \frac{d\mu}{\mu}=\frac{4y-2y}{2xy}dx\ \Rightarrow\ \frac{d\mu}{\mu}=\frac{2y}{2xy}dx\ \Rightarrow\ \frac{d\mu}{\mu}=\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\ln(\mu)=\ln(x)\ \Rightarrow\ \boxed{\mu=x}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$x\left(2y^2+\frac{1}{x}\right)dx+x(2xy)dy=0\ \Rightarrow\ \left(2xy^2+1\right)dx+\left(2x^2y\right)dy=0$$

وبأخذ $x_0=0\ ,\ y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=\int_0^x\left(2xy^2+1\right)dx+\int_0^y\left(2(0)^2y\right)dy$$

$$=\left[x^2y^2+x\right]_{x=0}^{x=x}+0=x^2y^2+x\ \Rightarrow\ \boxed{F(x,y)=x^2y^2+x=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❷ ❹ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y\,dx+\left(x-3x^3y^3\right)dy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=y\quad ,\ Q(x,y)=x-3x^3y^3$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1\quad ,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1-9x^2y^3$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q\frac{\partial z}{\partial x} - P\frac{\partial z}{\partial y}}dz$$

ومن أجل $z = x^2y^2$ نجد أنَّ: $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2$ وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1-\left(1-9x^2y^3\right)}{2xy^2\left(x-3x^3y^3\right)-2x^2y\left(y\right)}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{9x^2y^3}{2x^2y^2\left[1-3x^2y^3-1\right]}dz \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{9x^2y^3}{2x^2y^2\left[-3x^2y^3\right]}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2y^2}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{3}{2}\frac{1}{z}dz \Rightarrow$$

$$\ln\mu = -\frac{3}{2}\ln z \Rightarrow \ln\mu = -\ln z^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \ln\mu = \ln\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \mu = \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{1}{\left(x^2y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^3y^3} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{x^3y^3}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$\frac{1}{x^3y^3}y\,dx + \frac{1}{x^3y^3}\left(x-3x^3y^3\right)dy = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3y^2}dx + \left(\frac{1}{x^2y^3}-3\right)dy = 0$$

وبأخذ $x_0 = 1 , y_0 = 1$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y) = \int_1^x P(x,y)dx + \int_1^y Q(1,y)dy = \int_1^x\left(\frac{1}{x^3y^2}\right)dx + \int_1^y\left(\frac{1}{(1)^2(1)^3}-3\right)dy$$

$$= \left[-\frac{1}{x^2y^2}\right]_{x=1}^{x=x} + \left[-2y\right]_{y=1}^{y=y} = -\frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2} - 2y + 2$$

$$\boxed{F(x,y) = -\frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2} - 2y + 2 = c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.



❸❹ لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$(x\sin y + y\cos y)dx + (x\cos y - y\sin y)dy = 0$$

أوجد عامل التكميل لها.

الحل:

لدينا من المعادلة المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=(x\sin y+y\cos y) \quad , \quad Q(x,y)=(x\cos y-y\sin y)$$

وبما أنَّ:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x\cos y+\cos y-y\sin y \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y$$

من الواضح أنَّ $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$، وبالتالي فالمعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$P'_y-Q'_x=x\cos y+\cos y-y\sin y-\cos y=x\cos y-y\sin y=Q(x,y)$$

وبالتالي نختار عامل التكميل بالشكل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{x\cos y-y\sin y}{x\cos y-y\sin y}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=dx \Rightarrow \ln(\mu)=x \Rightarrow \boxed{\mu=e^x}$$

بضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل فتصبح تامة، وتكتب بالشكل:

$$e^x(x\sin y+y\cos y)dx+e^x(x\cos y-y\sin y)dy=0$$

وبأخذ $x_0=0 \ , y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=$$

$$=\int_0^x e^x(x\sin y+y\cos y)\,dx+\int_0^y e^{(0)}((0)\cos y-y\sin y)dy$$

$$=\sin y\int_0^x xe^x dx+y\cos y\int_0^x e^x dx-\int_0^y y\sin y\,dy$$

$$=\sin y\left[xe^x\Big|_0^x-\int_0^x e^x dx\right]+y\cos y\left[e^x\Big|_0^x\right]-\left[-y\cos y\Big|_0^y+\int_0^y\cos y\,dy\right]$$

$$=\sin y\left[xe^x-e^x\Big|_0^x\right]+y\cos y\left[e^x-1\right]-\left[-y\cos y+\sin y\Big|_0^y\right]$$

$$=\sin y\left[xe^x-(e^x-1)\right]+y\cos y\left[e^x-1\right]-\left[-y\cos y+\sin y\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{F(x,y)=e^x\left[(x-1)\sin y+y\cos y\right]=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.



4 أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$(x^2-y^2+2x)dx+(x^2-y^2-2y)dy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=(x^2-y^2+2x) \quad , Q(x,y)=(x^2-y^2-2y)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-2y \quad , \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q\frac{\partial z}{\partial x} - P\frac{\partial z}{\partial y}} dz$$

ومن أجل $z = x + y$ نجد أنَّ: $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2y - 2x}{(x^2 - y^2 - 2y) - (x^2 - y^2 + 2x)} dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2y - 2x}{-2y - 2x} dz \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = dz \Rightarrow \ln\mu = z \Rightarrow \mu = e^z \Rightarrow \boxed{\mu = e^{x+y}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$e^{x+y}(x^2 - y^2 + 2x)dx + e^{x+y}(x^2 - y^2 - 2y)dy = 0$$

وبأخذ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy =$$

$$= \int_0^x e^{x+y}(x^2 - y^2 + 2x)\,dx + \int_0^y e^{0+y}\left((0)^2 - y^2 - 2y\right)dy$$

$$= e^y \int_0^x e^x (x^2 - y^2 + 2x)\,dx - \int_0^y (y^2 + 2y)e^y\,dy$$

ولنوجد قيمة التكامل:

$$\int_0^t (t^2 + 2t)e^t dt$$

ننجز هذا التكامل بالتجزئة:

$$u = t^2 + 2t \Rightarrow du = (2t + 2)dt \Rightarrow du = 2(t+1)dt$$

$$dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\int_0^t (t^2 + 2t)e^t dt = (t^2 + 2t)e^t\Big|_{t=0}^{t=t} - 2\int_0^t (t+1)e^t dt = (t^2 + 2t)e^t - 0 - 2\int_0^t (t+1)e^t dt$$

ولننجز التكامل الأخير بالتجزئة أيضاً:

$$\int_0^t (t+1)e^t dt$$

لننجز هذا التكامل بالتجزئة:

$$u = (t+1) \Rightarrow du = dt \quad , \quad dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\int_0^t (t+1)e^t dt = (t+1)e^t\Big|_{t=0}^{t=t} - \int_0^t e^t dt = (t+1)e^t\Big|_{t=0}^{t=t} - e^t\Big|_{t=0}^{t=t} = (t+1)e^t - 1 - (e^t - 1)$$
$$= t\,e^t + e^t - 1 - e^t + 1 = t\,e^t$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\int_0^t (t^2+2t)e^t dt = (t^2+2t)e^t\Big|_{t=0}^{t=t} - 2\int_0^t (t+1)e^t dt = (t^2+2t)e^t - 2(t\,e^t)$$
$$= t^2e^t + 2te^t - 2te^t = t^2e^t$$

ومن نستنتج أنَّ:

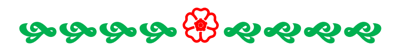
$$\int_0^x (x^2+2x)e^x\,dx = x^2e^x \quad , \quad \int_0^y (y^2+2y)e^y\,dy = y^2e^y$$

وبالتالي فإنَّ:

$$F(x,y) = \int_0^x P(x,y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy$$
$$= e^y\int_0^x e^x\left(x^2-y^2+2x\right)dx - \int_0^y (y^2+2y)e^y\,dy$$
$$= e^y\left[\int_0^x e^x\left(x^2+2x\right)dx - y^2\int_0^x e^x dx\right] - \int_0^y (y^2+2y)e^y\,dy$$
$$= e^y\left[x^2e^x - y^2\int_0^x e^x dx\right] - y^2e^y = e^y\left[x^2e^x - y^2(e^x-1)\right] - y^2e^y$$
$$= e^y\left[x^2e^x - y^2e^x + y^2\right] - y^2e^y = x^2e^{x+y} - y^2e^{x+y} + y^2e^y - y^2e^y = (x^2-y^2)e^{x+y} \Rightarrow$$

$$\boxed{F(x,y) = (x^2-y^2)e^{x+y} = c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.



❺❹ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$2xy\,dx + x^2dy + 2y\,dy = 0$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$2xy\,dx + (x^2+2y)dy = 0$$

ولدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y) = 2xy \quad , Q(x,y) = (x^2+2y)$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة تامة وبأخذ $x_0=0\ ,\ y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=\int_0^x 2xy\,dx+\int_0^y\left((0)^2+2y\right)dy$$

$$=y\int_0^x 2x\ dx+\int_0^y 2y\,dy=x^2y+y^2\Rightarrow \boxed{F(x,y)=x^2y+y^2=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❻❹ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(x^3+xy^4\right)dx+2y^3dy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=x^3+xy^4\quad ,\quad Q(x,y)=2y^3$$

وبما أنَّ:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=4xy^3\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

من الواضح أنَّ $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$، وبالتالي فالمعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$P'_y-Q'_x=4xy^3-0=4xy^3$$

وبالتالي نختار عامل التكميل بالشكل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx\ \Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=\frac{4xy^3}{2y^3}dx\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=2x\ dx\ \Rightarrow\ln(\mu)=x^2\ \Rightarrow\boxed{\mu=e^{x^2}}$$

بضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل فتصبح تامة، وتكتب بالشكل:

$$e^{x^2}\left(x^3+xy^4\right)dx+2e^{x^2}y^3dy=0$$

وبأخذ $x_0=0\ ,\ y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=\int_0^x e^{x^2}\left(x^3+xy^4\right)dx+\int_0^y 2e^{(0)^2}y^3dy$$

$$=\int_0^x x^3e^{x^2}dx+y^4\int_0^x xe^{x^2}dx+2\int_0^y y^3dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2e^{x^2}\Big|_{x=0}^{x=x}-\int_0^x xe^{x^2}dx\right]+\frac{1}{2}y^4\left[e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=x}+\frac{1}{2}y^4\Big|_{y=0}^{y=y}$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=x}\right]+\frac{1}{2}y^4\left[e^{x^2}-1\right]+\frac{1}{2}y^4$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}\left[e^{x^2}-1\right]\right]+\frac{1}{2}y^4\left[e^{x^2}-1\right]+\frac{1}{2}y^4$$

$$=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y^4e^{x^2}-\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{2}y^4 \Rightarrow$$

$$\boxed{F(x,y)=\frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2+y^4-1\right)+\frac{1}{2}=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❼❹ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(x^2-\sin^2 y\right)dx+x\sin(2y)dy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=\left(x^2-\sin^2 y\right) \quad , \quad Q(x,y)=x\sin(2y)$$

وبما أنَّ:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2\sin y\cos y=-\sin(2y)\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\sin(2y)$$

من الواضح أنَّ $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$، وبالتالي فالمعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$P'_y-Q'_x=-\sin(2y)-\sin(2y)=-2\sin(2y)$$

وبالتالي نختار عامل التكميل بالشكل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{-2\sin(2y)}{x\sin(2y)}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{x}dx \Rightarrow$$

$$\ln(\mu)=-2\ln(x)=-\ln(x^2)=\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \boxed{\mu=\frac{1}{x^2}}$$

بضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل فتصبح تامة، وتكتب بالشكل:

$$\frac{1}{x^2}\left(x^2-\sin^2 y\right)dx+\frac{x}{x^2}\sin(2y)dy=0 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{x^2}\sin^2 y\right)dx+\frac{1}{x}\sin(2y)dy=0 \Rightarrow$$

وبأخذ $x_0=1\ ,\ y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_1^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(1,y)dy=\int_1^x\left(1-\frac{1}{x^2}\sin^2 y\right)dx+\int_0^y\frac{1}{(1)}\sin(2y)dy$$

$$=\int_1^x dx-\sin^2 y\int_1^x\frac{1}{x^2}dx+\int_0^y\sin(2y)dy=\left[x\right]_{x=1}^{x=x}-\sin^2 y\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=x}+\left[-\frac{1}{2}\cos(2y)\right]_{y=0}^{y=y}$$

$$=(x-1)-\sin^2 y\left(-\frac{1}{x}+1\right)+\left[-\frac{1}{2}\cos(2y)+\frac{1}{2}\right]=(x-1)-\sin^2 y\left(-\frac{1}{x}+1\right)+\left[\frac{1-\cos(2y)}{2}\right]$$

$$=x-1+\frac{1}{x}\sin^2 y-\sin^2 y+\sin^2 y=x+\frac{1}{x}\sin^2 y-1 \Rightarrow \boxed{F(x,y)=x+\frac{1}{x}\sin^2 y-1=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

❼❹ أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$x\frac{dy}{dx}=\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y\,dx-xdy=0$$

ولدينا:

$$P(x,y)=\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y=3x^2\cos^2 y-\sin y\cos y=3x^2\cos^2 y-\frac{1}{2}\sin(2y)$$
$$Q(x,y)=-x$$

وبما أنَّ:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-6x^2\cos y\sin y-\cos(2y)\quad ,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$

من الواضح أنَّ $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ ، وبالتالي فالمعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$P'_y-Q'_x=-6x^2\cos y\sin y-\cos(2y)-(-1)=-6x^2\cos y\sin y+1-\cos(2y)$$
$$=-6x^2\cos y\sin y+2\sin^2 y=-2\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\sin y$$

وبالتالي نختار عامل التكميل بالشكل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{-P}dy \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{-2\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\sin y}{-\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y}dy \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{2\sin y}{\cos y}dy \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-2\left(\frac{-\sin y}{\cos y}\right)dy \Rightarrow$$

$$\ln(\mu)=-2\ln(\cos y)=-\ln\left(\cos^2 y\right)=\ln\left(\frac{1}{\cos^2 y}\right) \Rightarrow \boxed{\mu=\frac{1}{\cos^2 y}}$$

بضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل فتصبح تامة، وتكتب بالشكل:

$$\frac{1}{\cos^2 y}\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y\,dx-\frac{x}{\cos^2 y}dy=0 \Rightarrow$$

$$\left(3x^2-\frac{\sin y}{\cos y}\right)dx-\frac{x}{\cos^2 y}dy=0 \Rightarrow \left(3x^2-\tan y\right)dx-\frac{x}{\cos^2 y}dy=0$$

وبأخذ $x_0=0\ ,\ y_0=0$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=\int_0^x\left(3x^2-\tan y\right)dx+\int_0^y\left(-\frac{(0)}{\cos^2 y}\right)dy$$

$$=\left[x^3-x\tan y\right]_{x=0}^{x=x}=x^3-x\tan y \quad\Rightarrow\quad \boxed{F(x,y)=x^3-x\tan y=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

تمرينات غير محلولة

48 أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y\,dx-\left(x^2+y^2+x\right)dy=0\quad;\ \mu\left(x^2+y^2\right)$$

49 أثبت أن المعادلة التالية $\left(1-\frac{x}{y}\right)dx+\left(2xy+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$ غير تامة ، ثمَّ أوجد حلها العام إذا علمت أنها تقبل عامل تكميل من الشكل $\mu(x)$.

50 أثبت أن للمعادلة التفاضلية : $\left(x^2+y^2+x\right)dx+x\,y\,dy=0$ عامل تكميل تابع لـ x فقط ثم أوجد الحل العام لها .

51 أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x=\tan^{-1}(y')+\frac{y'}{1+y'^2}$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$x=\arctan(y')+\frac{y'}{1+y'^2}$$

ولحلها نفرض أنَّ $y'=p$ ومنه فإنَّ:

$$\boxed{x=\arctan(p)+\frac{p}{1+p^2}}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

وبما أنَّ:

$$y'=p\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=p\ \Rightarrow\ dy=pdx\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

وبالاستفادة من العلاقة (1) والتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$dy=p\left[\frac{1}{1+p^2}+\frac{\left(1+p^2\right)-p(2p)}{\left(1+p^2\right)^2}\right]dp\ \Rightarrow\ dy=p\left[\frac{\left(1+p^2\right)+\left(1+p^2\right)-2p^2}{\left(1+p^2\right)^2}\right]dp$$

$$dy=p\left[\frac{2+2p^2-2p^2}{\left(1+p^2\right)^2}\right]dp\ \Rightarrow\ dy=p\left[\frac{2}{\left(1+p^2\right)^2}\right]dp\ \Rightarrow\ dy=\frac{2p\,dp}{\left(1+p^2\right)^2}\ \Rightarrow$$

$$dy=\frac{dp^2}{\left(1+p^2\right)^2}\Rightarrow\int dy=\int\frac{dp^2}{\left(1+p^2\right)^2}\Rightarrow\boxed{y=-\frac{1}{\left(1+p^2\right)}+c}\cdots\cdots\cdots(2)$$

من العلاقتين (1) و (2) يتضح أنَّ الحل وسيطياً للمعادلة المعطاة هو:

$$x=\arctan(p)+\frac{p}{1+p^2}\quad,\quad y=-\frac{1}{\left(1+p^2\right)}+c$$

❺❷ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2y'^3-xy'+y=0$$

الحل:

إنَّ المعادلة محلولة بالنسبة لـ y من أجل ذلك نفرض $y'=p$ فنجد أنَّ المعادلة المعطاة تصبح بالشكل:

$$x^2p^3-xp+y=0\Rightarrow\boxed{y=xp-x^2p^3}\cdots\cdots\cdots(1)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نجد:

$$y'=xp'+p-3x^2p^2p'-2xp^2$$

وبما أنَّ $y'=p$ فالمعادلة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$p=xp'+p-3x^2p^2p'-2xp^3\Rightarrow x\left(1-3x\,p^2\right)p'-2xp^3=0\Rightarrow$$

$$\left(1-3x\,p^2\right)p'-2p^3=0\Rightarrow\left(1-3x\,p^2\right)p'=2p^3\Rightarrow p'=\frac{2p^3}{\left(1-3x\,p^2\right)}\Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{2p^3}{\left(1-3x\,p^2\right)}\Rightarrow\frac{dx}{dp}=\frac{1-3x\,p^2}{2p^3}\Rightarrow\frac{dx}{dp}=-\frac{3}{2p}x+\frac{1}{2p^3}\Rightarrow x'+\frac{3}{2p}x=\frac{1}{2p^3}$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية وغير متجانسة الدالة فيها x والمتحول المستقل p ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\frac{3}{2p}dp}=e^{\frac{3}{2}\int\frac{1}{p}dp}=e^{\frac{3}{2}\ln p}=e^{\ln\left(p^{\frac{3}{2}}\right)}=p^{\frac{3}{2}}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{d}{dp}\left(xp^{\frac{3}{2}}\right)=p^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{2p^3}=\frac{1}{2p^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}p^{-\frac{3}{2}}$$

وبمكاملة الطرفين بالنسبة لـ p نجد أنَّ:

$$xp^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\frac{p^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+c=-\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}+c\Rightarrow\boxed{x=-p^{-2}+cp^{-\frac{3}{2}}}\cdots\cdots\cdots(1')$$

وبتعويض قيمة x في العلاقة (1) نجد أنَّ:

$$y=\left(-p^{-2}+cp^{-\frac{3}{2}}\right)p-\left(-p^{-2}+cp^{-\frac{3}{2}}\right)^2p^3\Rightarrow$$

$$\boxed{y=-p^{-1}+cp^{-\frac{1}{2}}-\left(-p^{-2}+cp^{-\frac{3}{2}}\right)^{2}p^{3}}\cdots\cdots\cdots(2')$$

العلاقات $(1')$ و $(2')$ تمثل الحل الوسيطي المطلوب.

❸❺ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'\sin y'+\cos y'-x=0$$

الحل:

المعادلة المعطاة محلولة بالنسبة لـ x ولحلها نفرض $y'=p$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$p\sin p+\cos p-x=0\ \Rightarrow\ \boxed{x=p\sin p+\cos p}\cdots\cdots\cdots(1)$$

وبما أنَّ:

$$y'=p\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=p\ \Rightarrow\ dy=p\,dx$$

وبالتالي فإنَّ:

$$dy=p\left(\sin p+p\cos p-\sin p\right)dp\ \Rightarrow\ dy=\left(p^{2}\cos p\right)dp\ \Rightarrow$$

$$y=\int\left(p^{2}\cos p\right)dp\ \Rightarrow\ \boxed{y=\left(p^{2}-2\right)\sin p+2p\cos p+c}\ \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبالتالي فإنَّ الحل العام للمعادلة المعطاة وسيطياً هو:

$$\begin{cases}x=p\sin p+\cos p\\ y=\left(p^{2}-2\right)\sin p+2p\cos p+c\end{cases}$$



❹❺ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$2xy'+\frac{1}{y'}-y=0$$

الحل:

بوضع $y'=p$ نجد أنَّ:

$$2xp+\frac{1}{p}-y=0\ \Rightarrow\ y=2xp+\frac{1}{p}\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$p=y'=2p+2xp'-\frac{p'}{p^{2}}\ \Rightarrow\ p-2p=2xp'-\frac{p'}{p^{2}}\ \Rightarrow-p=\left(2x-\frac{1}{p^{2}}\right)p'\ \Rightarrow$$

$$-p^{3}=\left(2xp-1\right)p'\Rightarrow-p^{3}=\left(2xp^{2}-1\right)\frac{dp}{dx}\Rightarrow\ -\frac{1}{p^{3}}=\frac{1}{\left(2xp^{2}-1\right)}\frac{dx}{dp}\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{\left(2xp-1\right)}{p^{3}}\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dp}=-\frac{\left(2xp^{2}-1\right)}{p^{3}}=-\frac{2}{p}x+\frac{1}{p^{3}}\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x=\frac{1}{p^{3}}\ \Rightarrow$$

$$x'+\frac{2}{p}x=\frac{1}{p^3}$$

وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية بالدالة x والمتحول المستقل p ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\frac{2}{p}dp}=e^{2\ln p}=e^{\ln p^2}=p^2$$

وبضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[xp^2\right]'=p^2\left(\frac{1}{p^3}\right)=\frac{1}{p}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$xp^2=\ln p+c$$

ومنه فإنَّ:

$$x=\frac{\ln p+c}{p^2}$$

وبالتعويض في العلاقة (1) نجد أنَّ:

$$y=2p\left(\frac{\ln p+c}{p^2}\right)+\frac{1}{p}=2\left(\frac{\ln p+c}{p}\right)+\frac{1}{p}=\frac{1}{p}(2\ln p+1)+2\frac{c}{p}$$

مما سبق نجد أنَّ الحل الوسيطي للمعادلة المعطاة هو:

$$x=\frac{\ln p+c}{p^2}\quad,\quad y=\frac{1}{p}(2\ln p+1)+2\frac{c}{p}$$

❺❺ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y=3y'^4+\frac{1}{y'}$$

الحل:

بفرض $y'=p$ عندئذٍ بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$y=3p^4+\frac{1}{p}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$p=y'=12p^3p'-\frac{p'}{p^2}\Rightarrow p=\left(12p^3-\frac{1}{p^2}\right)p'\Rightarrow 1=\left(12p^2-\frac{1}{p^3}\right)p'$$

$$\frac{dp}{dx}\left(12p^2-\frac{1}{p^3}\right)=1\Rightarrow dx=\left(12p^2-\frac{1}{p^3}\right)dp\Rightarrow x=4p^3+\frac{1}{2p^2}+c\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

مما سبق نستنتج أنَّ الحل العام وسيطياً للمعادلة المعطاة هو :

$$x=4p^3+\frac{1}{2p^2}+c\quad,\quad y=3p^4+\frac{1}{p}$$

❺❻ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y' = \arctan\left(\frac{y}{y'^2}\right)$$

الحل:

بفرض $y' = p$ عندئذٍ بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$p = \arctan\left(\frac{y}{p^2}\right) \Rightarrow \tan p = \frac{y}{p^2} \Rightarrow y = p^2 \tan p \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$p = y' = 2pp'\tan p + p^2 \frac{p'}{\cos^2 p} \Rightarrow 1 = \left(2\tan p + \frac{p}{\cos^2 p}\right)p' \Rightarrow$$

$$1 = \left(2\tan p + \frac{p}{\cos^2 p}\right)\frac{dp}{dx} \Rightarrow dx = \left(2\tan p + \frac{p}{\cos^2 p}\right)dp \Rightarrow$$

$$x = \int\left(2\tan p + \frac{p}{\cos^2 p}\right)dp + c \Rightarrow x = 2\int \tan p\,dp + \int \frac{p}{\cos^2 p}dp + c \Rightarrow$$

$$x = 2\int \tan p\,dp + \left[p\tan p - \int \tan p\,dp\right] + c = \int \tan p\,dp + p\tan p + c \Rightarrow$$

$$x = -\int \frac{-\sin p}{\cos p}dp + p\tan p + c \Rightarrow x = -\ln(\cos p) + p\tan p + c \Rightarrow$$

$$x = p\tan p + \ln\left(\frac{1}{\cos p}\right) + c \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

مما سبق نستنتج أنَّ الحل العام وسيطياً للمعادلة المعطاة هو :

$$x = p\tan p + \ln\left(\frac{1}{\cos p}\right) + c \quad , \quad y = p^2 \tan p$$

❺❼ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية مع ذكر نوعها والحل الشاذ لها:

$$y = xy' - e^{y'}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تملك الشكل: $y = xy' + \psi(y')$ وهي **معادلة كليرو** ولحلها نفرض $y' = p$ ، ثم نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أنَّ:

$$y = xp - e^p \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$p = y' = xp' + p - p'e^p$$

ومنه نجد أنَّ:

$$xp' - p'e^p = 0 \Rightarrow (x - e^p)p' = 0$$

وبالتالي إما :

$$p'=0 \Rightarrow p=c$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ الحل العام في هذه الحالة هو:

$$y=cx-e^{c}$$

أو:

$$x=e^{p}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$y=pe^{p}-e^{p}=(p-1)e^{p}$$

وبالتالي فالحل الشاذ وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x=e^{p} \\ y=(p-1)e^{p} \end{cases}$$

وللحصول على الحل الشاذ ديكارتياً لدينا من المعادلة الأولى أنَّ:

$$x=e^{p} \Rightarrow p=\ln x$$

نعوض في المعادلة الثانية فنجد أنَّ الحل الشاذ ديكارتياً:

$$y=(\ln x-1)e^{\ln x} \Rightarrow \boxed{y=x(\ln x-1)}$$

❽❺ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y-xy'^{2}=y'^{2}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$y=xy'^{2}+y'^{2}$$

والمعادلة الأخيرة تملك الشكل: $y=x\varphi(y')+\psi(y')$ وهي معادلة لاغرانج ولحلها نفرض $y'=p$ ، ثم نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أنَّ:

$$y=xp^{2}+p^{2}=(x+1)p^{2} \quad \cdots\cdots\cdot(*)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$p=y'=p^{2}+2(x+1)pp'$$

ومنه نجد أنَّ:

$$p-p^{2}=2(x+1)pp' \Rightarrow p(1-p)=2(x+1)pp' \Rightarrow (1-p)=2(x+1)p' \Rightarrow$$

$$(1-p)=2(x+1)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{1}{(1-p)}=\frac{1}{2(x+1)}\frac{dx}{dp} \Rightarrow \frac{2(x+1)}{(1-p)}=\frac{dx}{dp} \Rightarrow$$

$$x'=\frac{2}{1-p}x+\frac{2}{1-p} \Rightarrow x'-\frac{2}{1-p}x=\frac{2}{1-p}$$

والمعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية وغير متجانسة بالدالة x والمتحول المستقل p ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\frac{-2}{1-p}dp}=e^{2\int\frac{-1}{1-p}dp}=e^{2\ln(1-p)}=e^{\ln(p-1)^{2}}=(1-p)^{2}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[x(1-p)^2\right]' = (1-p)^2\left[\frac{2}{1-p}\right] = 2(1-p)$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$x(1-p)^2 = -(1-p)^2 + c \Rightarrow \boxed{x = -1 + \frac{c}{(1-p)^2}}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$y = \left(-1 + \frac{c}{(1-p)^2} + 1\right)p^2 = \frac{cp^2}{(1-p)^2}$$

مما سبق نستنتج أنَّ الحل العام وسيطياً للمعادلة المعطاة هو:

$$x = -1 + \frac{c}{(1-p)^2} \quad , \quad y = \frac{cp^2}{(1-p)^2}$$

❾❺ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y = (y'+2)x + y'^2$$

الحل :

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل التالي:

$$y = x(y'+2) + y'^2$$

وهي معادلة لاغرانج كونها تملك الشكل:

$$y = x\, f(y') + g(y')$$

ولحلها نفرض $y' = p$ فنجد أنَّ المعادلة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$y = x(p+2) + p^2 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ثمَّ نشتق طرفي العلاقة (1) بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$p = y' = (p+2) + xp' + 2p\,p'$$

وبالتالي فإنَّ:

$$(x+2p)p' = p-(p+2) = -2 \Rightarrow (x+2p)\frac{dp}{dx} = p-(p+2) = -2 \Rightarrow$$

$$(x+2p) = -2\frac{dx}{dp} \Rightarrow -2x' - x = 2p \Rightarrow \boxed{x' + \frac{1}{2}x = -p}$$

والمعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة تفاضلية بالدالة x والمتحول المستقل p ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int\left(\frac{1}{2}\right)dp} = e^{\frac{1}{2}p}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[e^{\frac{1}{2}p}x\right]' = e^{\frac{1}{2}p}(-p) = -p\,e^{\frac{1}{2}p}$$

وبمكاملة طرفي العلاقة الأخيرة نجد أنَّ:

$$e^{\frac{1}{2}p}x=-\int pe^{\frac{1}{2}p}dp+c \Rightarrow e^{\frac{1}{2}p}x=-\left[2pe^{\frac{1}{2}p}-2\int e^{\frac{1}{2}p}dp\right]+c \Rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{2}p}x=-\left[2pe^{\frac{1}{2}p}-4e^{\frac{1}{2}p}\right]+c \Rightarrow e^{\frac{1}{2}p}x=-2(p-2)e^{\frac{1}{2}p}+c \Rightarrow$$

$$\boxed{x=-2(p-2)+ce^{-\frac{1}{2}p}} \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبتعويض العلاقة (2) في العلاقة (1) نجد أنَّ:

$$y=\left[-2(p-2)+ce^{-\frac{1}{2}p}\right](p+2)+p^2 \Rightarrow y=-2(p^2-4)+c(p+2)e^{-\frac{1}{2}p}+p^2 \Rightarrow$$

$$y=-2p^2+8+p^2+c(p+2)e^{-\frac{1}{2}p} \Rightarrow \boxed{y=-(p^2-8)+c(p+2)e^{-\frac{1}{2}p}} \cdots\cdots\cdots(3)$$

مما سبق نستنتج أنَّ الحل الوسيطي للمعادلة التفاضلية المعطاة هو:

$$\begin{cases} x=-2(p-2)+ce^{-\frac{1}{2}p} \\ y=-(p^2-8)+c(p+2)e^{-\frac{1}{2}p} \end{cases}$$

❀

06 أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x-y'\ln y'=0$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$x=y'\ln y'$$

وهذه المعادلة محلولة بالنسبة لـ x ولحلها نفرض $y'=p$ وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$x=p\ln p \cdots\cdots\cdots(1) \Rightarrow dx=\left(\ln p+p\frac{1}{p}\right)dp \Rightarrow dx=(1+\ln p)dp \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبما أنَّ:

$$p=y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{dy=pdx} \cdots\cdots\cdots(3)$$

وبتعويض العلاقة (2) في العلاقة (3) نجد أنَّ:

$$dy=p(1+\ln p)dp$$

وبمكاملة طرفي العلاقة الأخيرة نجد أنَّ:

$$y=\int p(1+\ln p)dp+c=\int p\,dp+\int p\ln p\,dp+c=\frac{1}{2}p^2+\left[\frac{1}{2}p^2\ln p-\int\frac{1}{2}p^2\frac{1}{p}dp\right]+c$$

$$=\frac{1}{2}p^2+\left[\frac{1}{2}p^2\ln p-\frac{1}{2}\int p\,dp\right]+c=\frac{1}{2}p^2+\left[\frac{1}{2}p^2\ln p-\frac{1}{4}p^2\right]+c \Rightarrow$$

$$y=\left[\frac{1}{2}p^2\ln p+\frac{1}{4}p^2\right]+c \Rightarrow y=\frac{1}{4}p^2\left(1+2\ln p\right)+c \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{4}p^2\left(1+\ln p^2\right)+c}$$

مما سبق نستنتج أنَّ الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية المعطاة هو:

$$\begin{cases} x=p\ln p \\ y=\dfrac{1}{4}p^2\left(1+\ln p^2\right)+c \end{cases}$$

❶❻ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'\sin y'+\cos y'-y=0$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$y=y'\sin y'+\cos y'$$

وهذه المعادلة محلولة بالنسبة لـ y ولحلها نفرض $y'=p$ عندئذٍ تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$y=p\sin p+\cos p \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

وباشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$p=y'=p'\sin p+pp'\cos p-p'\sin p=pp'\cos p \Rightarrow 1=p'\cos p \Rightarrow$$

$$1=\frac{dp}{dx}\cos p \Rightarrow dx=\cos p\,dp \Rightarrow \boxed{x=\sin p+c} \cdots\cdots\cdots(2)$$

مما سبق نستنتج أنَّ الحل العام للمعادلة المعطاة وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x=\sin p+c \\ y=p\sin p+\cos p \end{cases}$$



❷❻ أوجد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x\sqrt{1+y'^2}=y'$$

الحل:

سنحل هذه المعادلة بطريقتين:

❶ **الطريقة الأولى:**

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$x=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

وهذه المعادلة محلولة بالنسبة لـ x ومن أجل ذلك نفرض أنَّ: $y'=p$ وبالتالي تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$x=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

وبمفاضلة طرفي العلاقة الأخيرة نجد أنَّ:

$$dx=\left[\frac{\sqrt{1+p^2}-p\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{\left(\sqrt{1+p^2}\right)^2}\right]dp=\left[\frac{\left(\frac{1+p^2-p^2}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{\left(1+p^2\right)}\right]dp=\frac{1}{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}dp \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبما أنَّ:

$$p=y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{dy=p\,dx}\cdots\cdots\cdots(3)$$

وبتعويض العلاقة (2) في العلاقة (3) نجد أنَّ:

$$dy=\frac{p}{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}dp \Rightarrow y=\int\frac{p}{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}dp+c \Rightarrow y=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+p^2\right)}{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}+c \Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{\sqrt{1+p^2}}\right]+c \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}+c}$$

مما سبق نستنتج أنَّ الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}+c \end{cases}$$

❷ الطريقة الثانية:

$$x\sqrt{1+y'^2}=y'$$

الحل:

بفرض أنَّ: $\boxed{y'=\tan t}\cdots\cdots\cdots(1)$ عندئذٍ بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$x\sqrt{1+\tan^2 t}=\tan t \Rightarrow x\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\tan t \Rightarrow \frac{x}{\cos t}=\tan t \Rightarrow x=\cos t\,\frac{\sin t}{\cos t} \Rightarrow$$

$$\boxed{x=\sin t}\cdots\cdots\cdots(2) \Rightarrow \boxed{dx=\cos t\,dt}\cdots\cdots\cdots(3)$$

ولدينا من العلاقة (1) أنَّ:

$$y'=\tan t \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\tan t \Rightarrow \boxed{dy=\tan t\,dx}\cdots\cdots\cdots(4)$$

وبتعويض العلاقة (3) في العلاقة (4) نجد أنَّ:

$$dy=\tan t\left(\cos t\,dt\right) \Rightarrow dy=\sin t\,dt \Rightarrow \boxed{y=-\cos t+c}$$

وبالاستفادة مما سبق نجد أنَّ الحل العام وسيطياً هو:

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = -\cos t + c \end{cases}$$

❸❻ استخدم التمثيل الوسيطي لإيجاد الحل العام للمعادلة :

$$\ln(y') + \sin(y') - x = 0$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل التالي:

$$x = \ln(y') + \sin(y')$$

وهذه المعادلة محلولة بالنسبة لـ x ولحلها نفرض أنَّ $y' = p$ ، ثمَّ نعوض في المعادلة الأخيرة فنجد أنَّ:

$$x = \ln p + \sin p \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

وبالتالي فإنَّ:

$$dx = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right)dp \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

وبما أنَّ:

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{dy = p\,dx} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

وبتعويض العلاقة (2) في العلاقة (3) نجد أنَّ:

$$dy = p\left(\frac{1}{p} + \cos p\right)dp = (1 + p\cos p)dp$$

وبمكاملة طرفي العلاقة الأخيرة نجد أنَّ:

$$y = \int(1 + p\cos p)dp + c \Rightarrow y = \int dp + \int p\cos p\,dp + c \Rightarrow$$

$$y = p + \left[p\sin p - \int \sin p\,dp\right] + c \Rightarrow y = p + p\sin p + \cos p + c \Rightarrow$$

$$\boxed{y = p(1 + \sin p) + \cos p + c}$$

مما سبق نجد أنَّ الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة وسيطياً هو :

$$\begin{cases} x = \ln p + \sin p \\ y = p(1 + \sin p) + \cos p + c \end{cases}$$

❹❻ استخدم التمثيل الوسيطي لإيجاد الحل العام للمعادلة :

$$y' + y = xy'^2$$

الحل :

إن المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل التالي:

$$y' + y = x\,y'^2 \Rightarrow y = x\,y'^2 - y'$$

وهي معادلة لاغرانج لأنها تملك الشكل:

$$y = x\,f(y') + g(y')$$

ولحلها نفرض $y'=p$ ونعوض في المعادلة الأخيرة نجد:

$$y=x\,p^2-p\cdots\cdots(1)$$

ثم نشتق الطرفين بالنسبة لـ x فنجد:

$$y'=p^2+x\left(2p\,p'\right)-p'\Rightarrow p=p^2+x\left(2p\,p'\right)-p'\Rightarrow p-p^2=p'\left(2xp-1\right)\Rightarrow$$

$$p\left(1-p\right)=\frac{dp}{dx}\left(2x\,p-1\right)\Rightarrow\frac{dx}{dp}=\frac{\left(2x\,p-1\right)}{p\left(1-p\right)}\Rightarrow\frac{dx}{dp}=\frac{2p}{p\left(1-p\right)}x-\frac{1}{p\left(1-p\right)}\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp}-\frac{2}{\left(1-p\right)}x=-\frac{1}{p\left(1-p\right)}\Rightarrow\boxed{x'+\frac{2}{\left(p-1\right)}x=\frac{1}{p\left(p-1\right)}}$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وغير متجانسة بالدالة x والمتحول المستقل p ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\frac{2}{(p-1)}dp}=e^{2\int\frac{1}{(p-1)}dp}=e^{2\ln(p-1)}=e^{\ln(p-1)^2}=\left(p-1\right)^2\Rightarrow\boxed{\mu=\left(p-1\right)^2}$$

نضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل فتصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[x\left(p-1\right)^2\right]'=\left(p-1\right)^2\cdot\left[\frac{1}{p\left(p-1\right)}\right]=\frac{p-1}{p}=1-\frac{1}{p}\Rightarrow$$

$$\left[x\left(p-1\right)^2\right]'=1-\frac{1}{p}\Rightarrow x\left(p-1\right)^2=p-\ln p+c\quad\Rightarrow\boxed{x=\frac{1}{\left(p-1\right)^2}\left(p-\ln p+c\right)}\cdots\cdots(2)$$

بتعويض العلاقة (2) في العلاقة (1) نجد أنَّ:

$$y=\left(\frac{1}{\left(p-1\right)^2}\left[p-\ln p+c\right]\right)p^2-p=\frac{p^2}{\left(p-1\right)^2}\left[p-\ln p+c\right]-\frac{p\left(p-1\right)^2}{\left(p-1\right)^2}\Rightarrow$$

$$y=\frac{\cancel{p^3}-p^2\ln p+c\,p^2-\cancel{p^3}+2p^2-p}{\left(p-1\right)^2}\Rightarrow\boxed{y=\frac{\left(c+2\right)p^2-p\left(1+p\ln p\right)}{\left(p-1\right)^2}}$$

مما سبق نستنتج أنَّ الحل العام للمعادلة المعطاة وسيطيًّا هو :

$$x=\frac{\left(p-\ln p+c\right)}{\left(p-1\right)^2}\quad,\quad y=\frac{\left(c+2\right)p^2-p\left(1+p\ln p\right)}{\left(p-1\right)^2}$$

❻❺ أوجد الحل العام والحل الشاذ للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x\left(y'^2+1\right)=2yy'$$

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة محلولة بالنسبة لـ x تكتب بالشكل:

$$x=\left(\frac{2yy'}{y'^2+1}\right)$$

وبوضع $y'=p$ نجد أن المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$x=\left(\frac{2yp}{p^2+1}\right)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$\frac{dx}{dy}=\left(\frac{\left(2p+2y\frac{dp}{dy}\right)\left(p^2+1\right)-\left(2yp\right)\left(2p\frac{dp}{dy}\right)}{\left(p^2+1\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{2p\left(p^2+1\right)+2y\left(p^2+1\right)\frac{dy}{dp}-4yp^2\frac{dp}{dy}}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{2p\left(p^2+1\right)+2y\left[\left(p^2+1\right)-2p^2\right]\frac{dp}{dy}}{\left(p^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{2p\left(p^2+1\right)+2y\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}}{\left(p^2+1\right)^2}$$

وبما أنَّ $y'=p$ أي أنَّ:

$$p=y'=\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$$

وبالتالي فالمعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$\frac{1}{p}=\frac{2p\left(p^2+1\right)+2y\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}}{\left(p^2+1\right)^2}$$

ومنه نجد أنَّ:

$$2p^2\left(p^2+1\right)+2yp\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}=\left(p^2+1\right)^2\Rightarrow 2yp\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}=\left(p^2+1\right)^2-2p^2\left(p^2+1\right)$$

$$2yp\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}=\left(p^2+1\right)\left(p^2+1-2p^2\right)=\left(1+p^2\right)\left(1-p^2\right)\Rightarrow$$

$$2yp\left(1-p^2\right)\frac{dp}{dy}=\left(1+p^2\right)\left(1-p^2\right)$$

وبقسمة الطرفين على المقدار $1-p^2\neq 0$ نجد أنَّ:

$$2yp\frac{dp}{dy}=\left(1+p^2\right)\Rightarrow\frac{2p}{1+p^2}dp=\frac{dy}{y}\Rightarrow\int\frac{2p}{1+p^2}dp=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow$$

$$\ln\left(1+p^2\right)=\ln\left(y\right)+\ln\left(c\right)\Rightarrow\ln\left(1+p^2\right)=\ln\left(cy\right)\Rightarrow 1+p^2=cy\Rightarrow$$

$$p^2=cy-1\Rightarrow p=\sqrt{cy-1}$$

وبما أنَّ $p=y'$ فإنَّ المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$y'=\sqrt{cy-1}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\sqrt{cy-1}\Rightarrow\frac{dy}{\sqrt{cy-1}}=dx$$

وبالمكاملة نجد أنَّ:

$$\frac{2}{c}\sqrt{cy-1}=x+c_1 \Rightarrow \sqrt{cy-1}=\frac{c}{2}(x+c_1) \Rightarrow cy-1=\frac{c^2}{4}(x+c_1)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{4cy=c^2(x+c_1)^2+4}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة، أما الحل الشاذ فيتم استنتاجه من :

$$1-p^2=0 \Rightarrow (1-p)(1+p)=0 \Rightarrow p=\mp1 \Rightarrow y'=\mp1 \Rightarrow y=\mp x$$

وهذا الحل لا يمكن استنتاجه من عبارة الحل العام.

❻ أوجد الحل العام للمعادلة:

$$6y^2y'^2+3xy'-y=0$$

الحل :

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل التالي:

$$6y^2y'^2+3xy'-y=0 \Rightarrow 3xy'=y-6y^2y'^2 \Rightarrow 3x=\frac{y}{y'}-6y^2y'$$

ولنفرض $y'=p$ ، عندئذٍ تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$3x=\frac{y}{p}-6y^2p \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ولنشتق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ y فنجد أنَّ:

$$3\frac{dx}{dy}=\frac{p-y\frac{dp}{dy}}{p^2}-12yp-6y^2\frac{dp}{dy} \Rightarrow 3\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}-\frac{y\frac{dp}{dy}}{p^2}-12yp-6y^2\frac{dp}{dy} \cdots\cdots\cdots(*)$$

وبما أنَّ:

$$p=y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$3\frac{1}{p}=\frac{1}{p}-\frac{y\frac{dp}{dy}}{p^2}-12yp-6y^2\frac{dp}{dy} \Rightarrow -\frac{2}{p}=\left(6y^2+\frac{y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}+12yp \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{p}-12yp=\left(6y^2+\frac{y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy} \Rightarrow -2p\left(6y+\frac{1}{p^2}\right)=y\left(6y+\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy} \Rightarrow$$

$$-2p=y\frac{dp}{dy} \Rightarrow 2\frac{dy}{y}=-\frac{dp}{p} \Rightarrow 2\ln(y)=-\ln(p)+\ln c \Rightarrow$$

$$\ln(y^2)=\ln\left(\frac{c}{p}\right) \Rightarrow y^2=\frac{c}{p} \Rightarrow \boxed{p=\frac{c}{y^2}}$$

وبالتعويض في العلاقة (1) نجد أنَّ:

$$3x = y\left(\frac{y^2}{c}\right) - 6y^2\left(\frac{c}{y^2}\right) \Rightarrow 3x = \frac{y}{c} - 6c \Rightarrow \boxed{y = 3cx + 6c^2}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❼❻ أوجد الحل العام والحل الشاذ للمعادلة:

$$y' = 2\sqrt{y}\left(x - \frac{2y}{y'}\right)$$. (توجيه : افرض $y = z^2$) .

الحل:

بحسب التوجيه المعطى نفرض أنَّ: $y = z^2$ وبالتالي نجد أنَّ: $\sqrt{y} = z$, $y' = 2z\,z'$ ، نعوض في المعادلة المعطاة فنجد:

$$2z\,z' = 2z\left(x - \frac{2z^2}{2z\,z'}\right) \Rightarrow z' = x - \frac{z}{z'} \Rightarrow \frac{z}{z'} = x - z' \Rightarrow$$

$$\boxed{z = x\,z' - z'^2} \Rightarrow \boxed{z = x\,p - p^2} \cdots (1)\;;\; z' = p$$

وهي معادلة كليرو ولحلها يكفي أن نبدل كل z' بـ c وبالتالي فالحل العام هو:

$$z = x\,c - c^2 = c\,(x - c)$$

ومنه نجد أن حل المعادلة المعطاة هو:

$$y = z^2 = c^2(x - c)^2 \Rightarrow \boxed{y = c^2(x - c)^2}$$

أما لإيجاد الحل الشاذ:

إن المعادلة (1) هي معادلة كليرو لأنها تملك الشكل:

$$z = x\,p + f\,(p)\;;\; z' = p$$

والمعادلة التي تعطينا الحل الشاذ هي:

$$x + f'(p) = 0$$

وبالتالي أصبح لدينا:

$$f\,(p) = -p^2 \Rightarrow f'(p) = -2p$$

وبالتالي فالمعادلة التي تعطينا الحل الشاذ هي:

$$x - 2p = 0 \Rightarrow x = 2p \Rightarrow p = \frac{x}{2}$$

نبدل قيمة p في العلاقة (1) نجد أن :

$$z = x\,\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow z = \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = z^2 = \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = \frac{x^4}{16} \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^4}{16}}$$

❼❻ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية التالية:

$$y\,(y - 1)\,y'' + y'^2 = 0$$

الحل:

بوضع $y' = p$ نجد أنَّ:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}y'=p\frac{dp}{dy}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$y(y-1)p\frac{dp}{dy}+p^2=0 \Rightarrow y(y-1)p\frac{dp}{dy}=-p^2 \Rightarrow \frac{dy}{y(y-1)}=-\frac{p}{p^2}dp \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y(y-1)}=-\frac{dp}{p} \Rightarrow \int\frac{dy}{y(y-1)}=-\int\frac{dp}{p} \Rightarrow \int\frac{y-(y-1)}{y(y-1)}dy=-\int\frac{dp}{p} \Rightarrow$$

$$\int\frac{y}{y(y-1)}dy-\int\frac{(y-1)}{y(y-1)}dy=-\int\frac{dp}{p} \Rightarrow \int\frac{1}{(y-1)}dy-\int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{dp}{p} \Rightarrow$$

$$\ln(y-1)-\ln(y)=-\ln p+\ln c \Rightarrow \ln(y-1)-\ln(y)=\ln\left(\frac{1}{p}\right)+\ln c \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{y-1}{y}\right)=\ln\left(\frac{c}{p}\right) \Rightarrow \frac{y-1}{y}=\frac{c}{p} \Rightarrow \boxed{p=\frac{cy}{y-1}}$$

وبما أنَّ:

$$y'=p=\frac{cy}{y-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{cy}{y-1} \Rightarrow \left(\frac{y-1}{y}\right)dy=cdx \Rightarrow \int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=\int cdx \Rightarrow$$

$$\boxed{y-\ln y=cx+c_1}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

---

68 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية التالية:

$$yy''+y'^2=y'$$

الحل:

بما أنَّ المعادلة لا تحوي على x نفرض أنَّ $y'=p$ ومنه نجد أنَّ:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=y'\frac{dp}{dy}=p\frac{dp}{dy}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$y(y-1)\left(p\frac{dp}{dy}\right)+p^2=0 \Rightarrow y(y-1)\left(p\frac{dp}{dy}\right)=-p^2 \Rightarrow y(y-1)\left(\frac{dp}{dy}\right)=-p \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y(y-1)} \Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\frac{[(y-1)-y]}{y(y-1)}dy \Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y-1}\right)dy \Rightarrow$$

$$\ln(p)=\ln(y)-\ln(y-1)+\ln c \Rightarrow \ln(p)=\ln\left(\frac{cy}{y-1}\right) \Rightarrow p=\frac{cy}{y-1}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $p=y'$ نجد أنَّ العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$y' = \frac{cy}{y-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{cy}{y-1} \Rightarrow \left(\frac{y-1}{y}\right)dy = cdx \Rightarrow \left(1-\frac{1}{y}\right)dy = cdx \Rightarrow$$

$$\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy = c\int dx \Rightarrow y - \ln y = cx + c_1 \Rightarrow \boxed{y = \ln y + cx + c_1}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❾❻ جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1)\ y\,y'' - y'^2 = 0$$

$$2)\ xy'' + y' = 2x$$

الحل:

❶ إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأولى:

$$y\,y'' - y'^2 = 0$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة من المرتبة الثانية ولا تحوي على x ولحلها نفرض $y' = p$ وبالتالي فإنَّ:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = p\frac{dp}{dy}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أنَّ:

$$y\left(p\frac{dp}{dy}\right) - p^2 = 0 \Rightarrow y\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p^2 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} = p \ ;\ p \neq 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \ ;\ p \neq 0$$

$$\ln p = \ln y + \ln c \Rightarrow \ln p = \ln(cy) \Rightarrow p = cy \Rightarrow y' = c\,y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c\,y \Rightarrow \frac{dy}{y} = c\,dx$$

$$\Rightarrow \ln y = c\,x + \ln c_1 \Rightarrow \ln y - \ln c_1 = c\,x \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{c_1}\right) = c\,x \Rightarrow \frac{y}{c_1} = e^{cx} \Rightarrow \boxed{y = c_1 e^{cx}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❷ جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$xy'' + y' = 2x$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة من المرتبة الثانية ولا تحوي على y ونحلها بطريقة تخفيض المرتبة ولحلها نفرض $y' = p$ وبالتالي فإنَّ:

$$y'' = p'$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أنَّ:

$$xp' + p = 2x$$

وبملاحظة أنَّ الطرف الأول هو مشتق جداء فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(xp)=2x \Rightarrow d(xp)=2x\ dx \Rightarrow xp=x^2+c \Rightarrow p=x+\frac{c}{x} \Rightarrow$$

$$y'=x+\frac{c}{x} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x^2+c\ln x+c_1}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

❿❼ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية التالية:

$$2y\,y''=1+y'^2$$

الحل:

بما أن المعادلة التفاضلية المعطاة لا تحوي على x فإننا نفرض أنَّ $y'=p$ فنجد أنَّ:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}y'=p\frac{dp}{dy}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أنَّ:

$$2y\left(p\frac{dp}{dy}\right)=1+p^2 \Rightarrow y\left(\frac{dp}{dy}\right)=\frac{1+p^2}{2p} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{2p}{1+p^2}dp \Rightarrow$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2p}{1+p^2}dp \Rightarrow \ln y+\ln c_1=\ln\left(1+p^2\right) \Rightarrow \ln\left(c_1y\right)=\ln\left(1+p^2\right) \Rightarrow$$

$$c_1y=1+p^2 \Rightarrow p^2=c_1y-1 \Rightarrow p=\mp\sqrt{c_1y-1}$$

$$y'=p=\mp\sqrt{c_1y-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\mp\sqrt{c_1y-1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{c_1y-1}}=\mp dx \Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{c_1y-1}}=\mp\int dx$$

$$\frac{2}{c_1}\int\frac{c_1dy}{2\sqrt{c_1y-1}}=\mp\int dx \Rightarrow \frac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1}=\mp x+c \Rightarrow \sqrt{c_1y-1}=\frac{1}{2}c_1c\mp\frac{1}{2}c_1x \Rightarrow$$

$$\boxed{\sqrt{c_1y-1}=c_2\mp\frac{1}{2}c_1x}\ ;\ c_2=\frac{1}{2}c_1c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

تمارين خارجية على المعادلات التفاضلية من مراتب عليا:

❶❼ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية التالية:

$$y''+2y'=e^xy'^2$$

الحل:

نلاحظ أن الفرق بين مرتبتي الاشتقاق لذلك نتبع طريقة تخفيض المرتبة لذلك نفرض أن : $y'=z \Rightarrow y''=z'$ ومنه نجد أن المعادلة تصبح بالشكل :

$$z'+2z=e^xz^2$$

وهذه المعادلة هي معادلة برنولي لأنها تملك الشكل:

$$z'+p(x)z=z^{n}q(x)$$

وبالتالي لحلها نقسم طرفيها على z^2 فتصبح بالشكل:

$$\frac{z'}{z^2}+2\frac{1}{z}=e^{x}$$

ثمّ نجري التحويل التالي:

$$u=\frac{1}{z}\cdots\cdots(1)\Rightarrow u'=-\frac{z'}{z^2}\Rightarrow\frac{z'}{z^2}=-u'$$

نعوض في المعادلة الأخيرة فنجد أنَّ:

$$-u'+2u=e^{x}\Rightarrow\boxed{u'-2u=-e^{x}}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الدرجة الأولى بالدالة u والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل بالشكل:

$$\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{\int -2dx}=e^{-2x}\Rightarrow\boxed{\mu=e^{-2x}}$$

نضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل فتصبح تامة وتأخذ الشكل التالي:

$$u'-2u=-e^{x}\Rightarrow\left[ue^{-2x}\right]'=-e^{-x}\Rightarrow ue^{-2x}=\int -e^{-x}dx+c=e^{-x}+c\Rightarrow$$

$$ue^{-2x}=e^{-x}+c\Rightarrow\boxed{u=e^{x}+ce^{2x}}$$

نعوض ذلك في العلاقة (1) فنجد أنَّ:

$$\frac{1}{z}=u=e^{x}+ce^{2x}\Rightarrow\frac{1}{z}=e^{x}+ce^{2x}\Rightarrow z=\frac{1}{e^{x}+ce^{2x}}\Rightarrow y'=\frac{1}{e^{x}+ce^{2x}}\Rightarrow$$

$$y=\int\frac{1}{e^{x}+ce^{2x}}dx+c_1$$

$$J=\int\frac{1}{e^{x}+ce^{2x}}dx=\int\frac{e^{x}}{e^{2x}+ce^{3x}}dx\Rightarrow t=e^{x}\Rightarrow dt=e^{x}dx\Rightarrow$$

$$J=\int\frac{e^{x}}{e^{2x}+ce^{3x}}dx=\int\frac{dt}{t^2+ct^3}=\int\left(-\frac{c}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{c^2}{1+ct}\right)dt$$

$$=-c\ln t-\frac{1}{t}+c\ln(1+ct)=c\ln\left(\frac{1+ct}{t}\right)-\frac{1}{t}$$

$$J=c\ln\left(\frac{1+ce^{x}}{e^{x}}\right)-e^{-x}\Rightarrow\boxed{y=c\ln\left(\frac{1+ce^{x}}{e^{x}}\right)-e^{-x}+c_1}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة .



72 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'''^{2}+x\,y'''-y''=0$$

الحل:

نلاحظ الفرق بين رتبتي الاشتقاق هو واحد لذلك نستخدم طريقة تخفيض المرتبة وذلك بأن نفرض متحولاً جديداً هو $y''=z$ فنجد أنَّ:

$$y'''=z'$$

ثمَّ نعوض في المعادلة المعطاة فتصبح بالشكل:

$$z'^2 + x z' - z = 0 \Rightarrow z = xz' + z'^2$$

وهي معادلة كليرو ولحلها يكفي أن نعوض $z' = c$ في المعادلة الأخيرة فتصبح بالشكل:

$$z = xc + c^2 \Rightarrow y'' = xc + c^2 \Rightarrow y' = \frac{c}{2}x^2 + c^2 x + c_1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{6}x^3 + \frac{c^2}{2}x^2 + c_1 x + c_2}$$

وهو الحل المطلوب.

❸❼ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y''^2 = 1 - x^2$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل التالي:

$$y''^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y'' = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \boxed{y' = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx + c_1} \Rightarrow$$

$$J = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx \quad , \quad x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x \quad , \quad dx = \cos t\, dt \Rightarrow$$

$$J = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx = J = \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\ \cos t\, dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\ \cos t\, dt$$

$$= \int \cos^2 t\ dt = \int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + c_1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}\int \arcsin x\, dx + \frac{1}{2}\int x\sqrt{1 - x^2}\, dx + c_1 x + c_2}$$

$$J_1 = \int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad J_2 = \int x\sqrt{1 - x^2}\, dx = -\frac{1}{3}(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}\left[x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{3}(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2} \right] + c_1 x + c_2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}\left[x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}\left(1 - \frac{1}{3}(1 - x^2) \right) \right] + c_1 x + c_2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}\left[x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^2 \right) \right] + c_1 x + c_2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}\left[x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^2 \right) \right] + c_1 x + c_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left[x \arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1 - x^2}\,(2 + x^2) \right] + c_1 x + c_2}$$



❹❼ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y''+y'-y'^2=0$$

الحل:

نلاحظ أنَّ الفرق بين رتبة المشتقات هو واحد لذلك نستعمل طريقة تخفيض المرتبة لحل هذه المعادلة وذلك بأن نفرض أنَّ:

$$y'=z \Rightarrow y''=z'$$

فتصبح المعادلة بالشكل التالي:

$$z'+z-z^2=0 \Rightarrow z'=z^2-z \Rightarrow \frac{dz}{dx}=z^2-z \Rightarrow \frac{dz}{z^2-z}=dx \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{z(z-1)}=dx \Rightarrow \left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz=dx \Rightarrow \ln(z-1)-\ln(z)=x+c \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{z-1}{z}\right)=x+c \Rightarrow \frac{z-1}{z}=e^{x+c} \Rightarrow 1-\frac{1}{z}=e^{x+c} \Rightarrow \frac{1}{z}=1-e^{x+c} \Rightarrow$$

$$z=\frac{1}{1-e^{x+c}} \Rightarrow y'=\frac{1}{1-e^{x+c}} \quad y=\int\frac{1}{1-e^{x+c}}dx+c_1$$

$$y=\int\frac{1+(-e^{x+c}+e^{x+c})}{1-e^{x+c}}dx+c_1=\int\frac{1-e^{x+c}}{1-e^{x+c}}dx+\int\frac{e^{x+c}}{1-e^{x+c}}dx+c_1$$

$$=\int dx-\int\frac{-e^{x+c}}{1-e^{x+c}}dx+c_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{y=x-\ln\left(1-e^{x+c}\right)+c_1}$$

❺❼ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'''=\ln x$$

الحل:

نكامل مباشرة ثلاث مرات اعتماداً على التكامل بالتجزئة فنحصل على الحل المطلوب:

$$y'''=\ln x \Rightarrow y''=\int \ln x\,dx+c_1$$

$$J=\int \ln x\,dx \;,\; u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \;,\; dv=dx \Rightarrow v=x \Rightarrow$$

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x \Rightarrow$$

$$y''=x\ln x-x+c_1 \Rightarrow y'=\int(x\ln x-x+c_1)dx+c_2=\int x\ln x\,dx-\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2$$

$$J_1=\int x\ln x\,dx \Rightarrow u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \;,\; dv=x\,dx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \Rightarrow y' = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} + c_1 x + c_2 \Rightarrow$$

$$y = \int\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} + c_1 x + c_2\right)dx = \frac{1}{2}\int x^2 \ln x\, dx - \frac{x^3}{4} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3 \Rightarrow$$

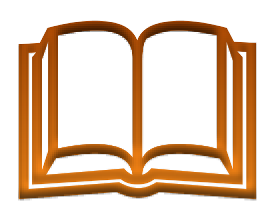
$$J_2 = \int x^2 \ln x\, dx \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \;,\; dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \Rightarrow$$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right) - \frac{x^3}{4} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3 \Rightarrow y = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^3}{4} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3}$$

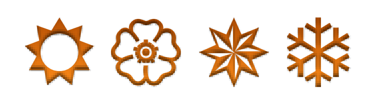




The End

Ahmad Hatem Abo Hatem
Friday 10/03/2017

Differential Equations 1



أ. أحمد حاتم أبو حاتم

0947075489